УДК 51(091)

# ИНТУИЦИЯ И ЭВРИСТИКА В МАТЕМАТИКЕ

**© Л. Б. Султанова**

*Башкирский государственный университет*
*Россия, Республика Башкортостан, 450074 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*
*E-mail: sultanova2002@yandex.ru*

*Статья по философии математики, т.е. имеет междисциплинарный характер. Основным предметом исследования в статье является математическая эвристика как совокупность методов решения нестандартных задач в математике, т.е. таких задач, для которых не существует известных алгоритмов решения. В качестве специфического механизма мышления, порождающего элементы догадки, необходимые в качестве основы математической эвристики, автором согласно традиции берется интуиция. В своей работе автор основывается на выводах, полученных Ж. Адамаром, Н. Винером, Р. Декартом, А. Пуанкаре, и Ж. Пиаже. На основе концепции рациональной интуиции Р. Декарта, автор разрабатывает концепцию эвристической интуиции. В итоге автор обращается к вопросу о возможности полного перевода интуитивно полученных математических утверждений в дискурсивные, что, фактически, означает максимальное углубление математического доказательства, т.е. его максимальную рационализацию. Для этого оказывается необходимым неоднократное привлечение все той же интуиции, т.к. именно интуиция способна трансформировать интуитивные элементы в дискурсивные. Поэтому с этой точки зрения, обоснование интуитивно полученного математического доказательства должно представлять собой не что иное как «многослойный» творческий процесс. Вообще, автор, опираясь на исследования А. Пуанкаре, обосновывает, что суть математического творчества заключается в том, чтобы не «перебирать», а «выбирать». Обращаясь для наглядности к примерам, автор выявляет моменты «вмешательства» интуиции даже в процессе решения школьных задач. Поэтому и сегодня невозможно игнорировать феномен интуиции и те результаты, которые были исторически получены теорией познания при исследовании творческих механизмов. Только такой подход позволит несколько углубить наше представление о работе мышления по созданию математической эвристики.*

***Ключевые слова:*** *математическая эвристика, рациональная интуиция, эвристическая интуиция, озарение, рационализация математической эвристики, моменты «вмешательства» интуиции, «эвристическое узнавание», «многослойный» эвристический процесс обоснования в математике*

Исследование природы творческого мышления традиционно является одной из важнейших задач теории познания. Многие выдающиеся философы в различные периоды истории занимались изучением природы интуиции как движущей силы творчества и важнейшего – наряду с логикой – орудия научного исследования. Во второй половине двадцатого века интерес к изучению феномена интуиции заметно возрос в связи с активизацией научных исследований природы творческого мышления человека. Тем не менее, сегодня, как и раньше, мы очень мало знаем природу интуитивного мышления и те условия, которые на него влияют. В самом общем смысле, значение термина «интуиция» в философии обозначает особую способность отдельных личностей к выдвижению интересных гипотез и построению верных заключений без предварительного доказательства и необходимых оснований. Иногда говорят, что именно интуиция позволяет придти к догадке – спонтанному суждению, не имеющему при его выдвижении достаточных логических или эмпирических оснований.

Интуиция многообразна. Именно с интуицией связывают различные виды человеческой деятельности, относящиеся к творчеству. Сразу оговоримся, что здесь в виду имеется математическая интуиция, то есть интуиция, связанная с решением математических проблем и задач. Ближе всего к математической интуиции декартова концепция рациональной интуиции, согласно которой в познавательной деятельности участвует так называемая рациональная интуиция, продуцирующая истинные суждения на основе «естественного света разума». Из работ Декарта можно сделать вывод, что, дедуктивная цепь образуется как последовательная цепь таких утверждений. Истинность таких утверждений представляется очевидной. С учетом понятия неявного знания, из работ Декарта можно вывести обновленную концепцию интуиции, которая и будет здесь в дальнейшем рассматриваться как опорная. Суть такого понимания интуиции заключается в том, что конечное утверждение дедуктивной цепи, являющееся результатом всего дедуктивного вывода, правомерно рассматривать как суждение, в «свернутом» виде содержащее всю цепочку подобных предварительно полученных утверждений. Это значит, что это конечное дедуктивное утверждение правомерно рассматривать и как свернутое умозаключение, нуждающееся в последующем пошагово-дедуктивном разворачивании, то есть в доказательстве.

Действительно, в математическом познании зачастую интуитивно усматривается именно конечное дедуктивное суждение, истинность которого в первый момент очевидна только его творцу как субъекту математического открытия: этот творец, в отличие от других математиков, личностным образом, совершенно естественно как бы *«видит»* всю дедуктивную цепь. Но другие математики, и в целом все математическое сообщество, стремятся к разворачиванию этой дедуктивной цепи для доказательства основного вывода, поэтому для них дедукция имеет другое направление пошагового распространения очевидной истинности – такое, как и предусмотрено у Декарта, то есть от посылок к выводу. Поэтому для первооткрывателя такой путь представляется как разворачивание дедуктивной цепи из суждения, полученного интуитивно, то есть посредством выполнения процедуры, обратной декартовой. Нетрудно понять, что оба пути правомерны и корректны, однако в реальном познании реализуется дедуктивная стратегия, обратная декартовой, хотя и из нее вытекающая. Поэтому, хотя, по Декарту, интуитивные суждения усматриваются разумом как интуитивно-очевидные, то есть такие суждения, истинность которых не вызывает у нас ни малейшего сомнения, с точки зрения реального познания, в последующем доказательстве не нуждаются только врожденные идеи. Все остальные суждения, усмотренные интуитивно, должны быть по правилам дедукции еще и выведены из аксиом, принимающихся как врожденные истины, то есть, безусловно.

Говоря о недостаточной изученности феномена интуиции как объекта философского исследования, вызванной его уникальной сложностью, в основном имеют в виду неразгаданность, то есть неэксплицируемость действия ее механизма. Механизм деятельности интуиции в двадцатом веке становится объектом пристального внимания не только философов и научных методологов, но и крупнейших математиков, поскольку именно математика, не имеющая по природе своей связи с опытом, непосредственно опирается на работу интуиции. А.Пуанкаре следующим образом характеризует действие математической интуиции: «сначала обращение к чувствам и воображению; затем обобщение посредством индукции, так сказать, срисованное с приемов экспериментальных наук, наконец, мы имеем интуицию чистого числа ... которая может дать начало настоящему математическому заключению» [1, с. 210]. Наиболее соответствует специфике математической науки, на наш взгляд, интуиция чистого числа и чистых логических форм, которую А. Пуанкаре характеризует как «головокружительную», поскольку она требует максимальной степени абстрагирования.

Математическая интуиция – это основа творческого процесса в математике. Она проявляется, прежде всего, как акт схватывания значения важности структуры задачи или проблемы; все это происходит без опоры на развернутые аналитические средства. Действие интуиции всегда основывается на солидном знании предмета, ее «включение» невозможно без упорной сосредоточенности на проблеме. Интуитивное прозрение посещает только одержимых. Вообще уровень осведомленности, необходимый для «включения» интуиции, не поддается никаким измерениям, а его достижение невозможно без самых серьезных усилий, которые в этом смысле никогда не будут чрезмерными. Психологически интуитивному знанию присуща убежденность, которая позволяет воспринимать его самым серьезным образом, несмотря на отсутствие обоснования, и обязывает ученого, исследователя упорно стремиться к поиску этого обоснования. Важно понимать, что интуиция не может быть свободной от самой пристрастной проверки и сомнений, что, опять-таки, вполне в духе Декарта. Правильность или ошибочность результатов работы механизма математической интуиции устанавливается, в конечном счете, не самой интуицией, а методами логической проверки. Действительно, если бы математическая интуиция всегда была достоверной, математическая наука состояла бы из одних аксиоматических систем, и не было бы необходимости в каких-либо доказательствах. Необходимость именно логической проверки – не единственная особенность математической интуиции по сравнению с другими видами научной интуиции, например, по сравнению с физической интуицией, то есть с интуицией, участвующей в физическом познании. Основное отличие между физической и математической интуициями заключается в различном их основании при формировании всеобщих и необходимых суждений, то есть при так называемом заключении по индукции. В суждении по индукции в математике мы опираемся только на могущество разума, поскольку «она (математическая индукция – прим. автора) есть только подтверждение одного из свойств самого разума», а «индукция, применяемая в физических науках ... опирается на веру во всеобщий порядок Вселенной – порядок, который находится вне нас.», и поэтому «всегда недостоверна»[1, с. 21]. Отсюда можно заключить, что математические истины, строго говоря, «не нуждаются ни в каком подтверждении» со стороны порядка, который находится вне нас. В самом деле, «опыт может быть для него (разума) только поводом воспользоваться ею (интуицией – прим автора) и осознать ее» [1, с. 21].

В таком положении вещей, как представляется, коренится истинная причина того, что различного рода интуитивные суждения, догадки более важны в математике, чем в экспериментальных науках. Действительно, в математике возможен только «мысленный эксперимент», или эвристическая догадка, которая является результатом действия деятельности механизма математической интуиции. Такая уникальная особенность математики лишний раз подчеркивает важность исследования природы математической интуиции как движущей силой математического творчества. Сила математической интуиции и определяет основные особенности стиля мышления и исследования того или иного конкретного математика. Кратко математическую интуицию в этом аспекте можно охарактеризовать как озарение, поскольку именно так принято называть момент «срабатывания» механизма интуиции во время кульминации творческого процесса в математике.

Озарение – это центральный этап исследовательского процесса в математике. Его можно рассматривать как качественный скачок в ходе познания, как решающий его момент. Именно в озарении заключается смысл и цель математического творчества. Как правило, момент озарения непредсказуем, но его в ходе эвристического, то есть творческого процесса его можно предчувствовать. Феномен внезапного озарения является объектом самого пристального внимания философов и методологов не только в области математики. Как представляется, наибольшее значение для развития этих исследований имеют две работы: «Математическое творчество» А. Пуанкаре и «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» Ж. Адамара, в которой автор развивает идеи, высказанные в упомянутой работе А. Пуанкаре. По выражению Ж. Адамара «Наблюдения Пуанкаре пролили свет на отношения между сознательным и бессознательным, между логикой и случайностью» [2, с. 36], а, значит, позволили лучше разобраться в особенностях интуитивного мышления.

Ж. Адамар предложил ныне общепринятую в современной науке и философии модель эвристического, то есть творческого процесса в науке[2, с. 36]. Он выделяет следующие этапы творческого процесса в науке: во-первых, этап подготовки, когда происходит изучение солидных массивов литературы, имеющей то или иное отношение (необязательно прямое) к поставленной задаче или исследуемой проблеме. Во-вторых, это этап инкубации, когда подсознание активно работает над накопленным на этапе подготовки материалом. Работа на этапе инкубации происходит неосознанно, и только редкие мысли могут прорваться в собственно сознание. Исследователь при этом вообще может отключиться от работы над основной проблемой – отдыхать или заниматься подготовкой материала по другой проблеме. Ж.Адамар выдвигает в этой связи гипотезу отдыха или забвения как необходимую на этом этапе. Далее следует непосредственно само озарение как центральный этап эвристического процесса. «Вспышка» озарения – результат работы подсознания. Озарение непредсказуемо. Невозможно точно определить, когда же оно произойдет, да и произойдет ли вообще. Озарение может быть отодвинуто по времени от предыдущего этапа творческого процесса – этапа инкубации. Точнее, этап инкубации с перерывами может растянуться надолго, поскольку озарение – результат скрытой деятельности подсознания.

По сути дела, озарение и составляет основную загадку эвристического процесса. Суть озарения – «прорыв» из подсознания в область собственно сознания, который мы ощущаем как спонтанную вербализацию. Разумеется, непосредственно во время озарения нельзя вести речь о полноценной теории или строгих формулах, однако в результате озарения происходит самое главное – исследователь получает некий первичный результат-эстафету, который как бы передается из подсознания в область сознания для дальнейшей работы над этими результатами в целях их окончательного завершения, что и происходит обычно на последнем этапе эвристического процесса – этапе проверки. Ж.Адамар сравнивает озарение с узнаванием чужого лица, свойственное человеку. Такое узнавание можно назвать эвристическим, и именно такое узнавание, по Ж.Адамару, лежит в основе озарения[2; 1, с. 403]. Как открытие нового знания невозможно без участия интуиции, так и срабатывание механизма интуиции на этапе озарения во время творческого процесса невозможно без эвристического узнавания. Эвристическое узнавание можно рассматривать и как очень точный вид изоморфизма, и как обнаружение аналогии. Таким образом, исследования Ж. Адамара показывают, что суть математического творчества, а, значит, и научного творчества вообще, ни в коем случае не может быть сведена к механическому перебору всевозможных вариантов. В таком понимании сути математического творчества Ж.Адамар близок к А.Пуанкаре, на работах которого по методологии науки и основывался. Определяя специфику математического творчества, А.Пуанкаре писал, что математическое творчество «...состоит как раз в том, чтобы не создавать бесполезных комбинаций, а строить такие, которые оказываются полезными, а их ничтожное меньшинство. Творить – это отличать, выбирать» [1, с. 403]. Ценность творческого мышления как раз и заключается в том, что оно позволяет избежать механического перебора возможных вариантов и «подводит» субъекта эвристического процесса к правильному решению.

Представляется, что при применении математической символики так же осуществляется эвристическое узнавание субъектом математического познания уже известного ему математического символа. Это так называемое эвристическое узнавание применения: ему непременно должно предшествовать эвристическое узнавание математического открытия. Эвристическое узнавание применения можно рассматривать как некое «вторичное» эвристическое узнавание. Оно соответствует математической интуиции, понимаемой как наглядное созерцание. Представляется, что в ситуации решения какой-либо нестандартной математической задачи, эвристическое узнавание открытия и эвристическое узнавание применения как бы переплетаются в едином творческом процессе. Их квалификация как различных типов эвристического узнавания необходима только на философско-методологическом уровне. Для философии и методологии науки важен, прежде всего, тот факт, что «изучая процесс математического мышления, мы вправе рассчитывать на проникновение в самую сущность человеческого ума» [1, с.399]. Это значит, что методология математики позволяет проникнуть непосредственно в работу самого мышления, в его самую суть; и, прежде всего, в этом заключается ценность исследования творческих аспектов математического познания. Такая специфика математического мышления спецификой объектов, которыми оно оперирует, а, именно, их абстрактностью.

Категории интуиции в науке и философии традиционно противостоит категория логики, а интуитивному суждению – алгоритм, понятие которого имеет огромное значение в математике. Концептуально алгоритм можно рассматривать как аналог некоторого процесса человеческой деятельности. Алгоритм в математике определяется как четкая последовательность действий, как однозначно жесткое предписание, когда при заданных начальных условиях в результате выполнения этих действий мы гарантированно получаем решение некоторой математической задачи. При этом случаи, когда решения не существует, оговорены особо. Например, при построении графика некоторой функции, заданной конкретной формулой, мы всегда вначале ищем область определения этой функции. Класс задач, для решения которых в математике применяются конкретные алгоритмы, на современном этапе развития математики очень широк. Однако и в математике, и в других науках, опирающихся на математический аппарат, всегда найдется достаточное количество важнейших задач, решение которых не может быть найдено с помощью уже известных алгоритмов. Вследствие этого в математике всегда будут иметь большое значение методы, которые в отличие от алгоритмических не гарантируют получение решения в результате выполнения определенной последовательности действий, но, вместе с тем, позволяют приблизиться к решению сложнейших задач. Эти методы называются *эвристическими.* К ним мышление математика прибегает как бы спонтанно: эвристические методы, как говорят, «приходят в голову» во время напряженных размышлений над поставленной задачей. Ранее математик о них и не подозревает. Иначе говоря, «Эвристические методы не существуют (в отличие от алгоритмов – прим. автора), а вырабатываются по ходу решения» [3, 4]. Даже применяя уже, казалось бы, широко известные эвристические методы (в настоящее время многие распространенные эвристические методы описаны в методологической литературе[5], мы сами продуцируем в них элементы необратимости в целях применения этих методов к решению конкретной задачи. Ценность подобных методов прежде всего в их гибкости, позволяющей получать решение нестандартной математической задачи в отсутствие для нее алгоритмического решения.

Традиционно под математической эвристикой понимают совокупность эвристических средств, то есть приемов, методов и процедур математики, применяющихся при доказательстве теорем и решении сложных нестандартных задач, для которых не существует стандартных отработанных алгоритмов. «Эвристический» в данном контексте означает «необратимый», содержащий элемент догадки, и вследствие этого полностью неалгоритмизируемый, то есть пошагово неповторяемый в целом (из-за элементов необратимости)[6]. Ни в коем случае нельзя воспринимать математическую эвристику только как некоторый свод правил, которых следует придерживаться при решении задач, чтобы получить результат за более короткий промежуток времени тем же алгоритмическим способом, без какого-либо качественного изменения привычного подхода. Такое представление о методах математического познания ложно. Эвристика действительно бывает различной в зависимости от степени сложности решаемой математической задачи – ее может быть «больше» или «меньше» в зависимости от степени сложности решаемой задачи, но без возникновения *догадки*, а, значит, и без участия интуиции эвристический процесс невозможен в принципе, даже в самом примитивном варианте. Эвристика имеет огромное значение в математике. Можно констатировать, что решение практически ни одной серьезной математической задачи или доказательство теоремы, даже на современном уровне развития математики, уровень формализации которой очень высок, не обходится без применения эвристических методов и приемов. Это делает таким понятным немалый интерес к изучению математической эвристики.

Итак, эвристические методы, в отличие от алгоритмических, позволяют отступить от жесткой схемы в решении нестандартной задачи. Полезность математической эвристики заключается прежде всего в том, что ее применение позволяет значительно сократить число перебираемых алгоритмов при поиске решения нестандартной задачи. Крайне важен, и особенно в данном контексте, тот факт, что такое сокращение достигается в результате интуитивного выбора, в основе которого лежит эвристическое узнавание аналогий, то есть элементов знакомого в новом. Функция догадки как раз и заключается в обнаружении этих аналогий. *Догадка и аналогия – это «ключ» к эвристике, ее определяющий признак.* Поэтому принципиально недостаточно определять эвристику только как систему правил, определяющих такую тактику решения задачи, которая существенно ограничивает перебор методов ее решения, поскольку указанное сокращение числа предполагаемых методов решения задачи возможно только благодаря возникновению догадки. Строгий математический метод в отличие от эвристического носит алгоритмический характер и является стандартным. Применение строгого математического метода не связано с возникновением догадки, которая, напротив, является необходимым элементом эвристического метода в математике. При решении какой-либо нестандартной задачи мышление математика может продуцировать целую серию догадок – в зависимости от сложности решаемой задачи.

Известно, что эвристический подход в математике возник еще в античный период, о чем свидетельствует открытие так называемой папповой эвристики. О ней впервые упоминает Рене Декарт в своей «Геометрии», вышедшей в 1637 г. Не забыт Папп Александрийский и современной историей математики [7]. Основной труд Паппа Александрийского – «Математическое собрание» – содержит обширные комментарии к работам классиков древнегреческой геометрии, в частности, к Евклиду. В своем трактате «Искусство решать задачи» Папп Александрийский выделил как минимум два эвристических приема: регрессивное рассуждение (решение задачи от конца (цели) к началу (данным)), либо наоборот – прогрессивное рассуждение; а также связанный с этим действием прием доопределения цели и данных посредством выведения при этом следствий; процедура второго приема отмечалась Паппом неявно.

За все время своего существования в качестве аппарата решения множества задач самого различного характера, математика накопила поистине необъятное количество различных эвристических приемов, методов и процедур. Представляется, что к наиболее употребительным можно отнести метод индукции, метод интерпретаций, метод доказательства от противного, и некоторые другие методы. В геометрии, в частности, широко применяется эвристический метод дополнительного построения, при котором геометрический чертеж достраивается до какой-либо известной геометрической фигуры; вообще приветствуется выполнение дающего наглядную опору мышлению рисунка и т. д. При решении особенно сложных математических задач используются в различных сочетаниях самые разнообразные эвристические приемы и методы. Чем сложнее задача, тем, разумеется, разнообразнее применяемая при ее решении эвристика.

Отметим тот примечательный факт, что практически каждый автор «видит» эвристические методы по-своему и дает их оригинальную классификацию. Особенно ярко это проявляется в так называемой *поисковой эвристике*, к которой можно отнести советы и пожелания, даваемые себе субъектом процесса решения математической задачи в целях выработки наиболее эффективной стратегии решения. Понятно, что поисковая эвристика строго индивидуальна. Накопив достаточный опыт решения нестандартных задач, мы часто неосознанно следуем этому опыту. Поисковая эвристика сосредотачивает в себе опыт научного творчества, и этот опыт поистине бесценен. Каждый крупный математик, как правило, на основе систематизации своей индивидуальной поисковой эвристики, вырабатывает свою собственную неповторимую эвристическую стратегию. В принципе, такая поисковая эвристика не является специфически математической, подобно тем эвристическим приемам и методам, примеры которых были разобраны здесь ранее, а в целом носит общенаучный характер.

Ценность математики еще и в том, что она в силу своей ориентации на решение нестандартных задач, может быть поистине названа кладезью опыта поисковой эвристики.

Одну из наиболее интересных классификаций поисковой эвристики разработал известный венгерский математик, а также исследователь в области философии и методологии математики Дж. Пойа. Согласно воззрениям Дж. Пойа, в основе любой эвристики лежит сходство по аналогии или очень точный вид изоморфизма[4]. Для поиска такой аналогии – в чем, по сути, и заключается главная задача применения эвристики в математике – Дж. Пойа выделяет следующие эвристические стратегии: во-первых, это видоизменение задачи, при котором осуществляется поиск новых комбинаций в условии задачи; во-вторых, введение вспомогательных элементов, при котором ставится цель выявления новых связей между элементами условия задачи. Далее, большое значение имеет мобилизация как восстановление в памяти научного материала, необходимого для решения задачи; а также организация как комбинирование восстанавливаемых элементов, которое должно привести нас к плодотворному видоизменению задачи. В этом нам должна помочь и специализация, которая заключается в том, что от изучения данного множества элементов мы переходим к изучению его подмножества или к изучению отдельного элемента данного множества. Абстрактным математическим объектам при этом придается более конкретная форма.

При использовании какой-либо из указанных Дж. Пойа эвристических стратегий, применяются различные эвристические методы и приемы – например, такие, как приведенные здесь ранее доказательство от противного, индукция, обобщение и т. д. Это означает, что понятие эвристической стратегии является обобщающим и организующим по отношению к понятиям эвристического приема или метода. Эвристические стратегии всегда имеют определенную последовательность, поскольку каждая из них преследует определенную цель. В частности, видоизменение задачи – цель применения эвристики, а мобилизация и специализация – эвристические стратегии, позволяющие ее достичь.

Интересно, что для Дж. Пойа характерен несколько своеобразный подход к определению понятия «эвристический». Рассуждения эвристического характера, содержащие догадку, он определяет как «правдоподобные»: «Результат творческой работы математика – доказательные рассуждения, доказательство, но доказательство открывают с помощью правдоподобных рассуждений, с помощью догадки.»[3]. Возникновение догадки вызывает интерес в основном потому, что догадку невозможно планировать, предсказывать.

Представляется, что Дж. Пойа в своем исследовании математической эвристики делает акцент на методологии изучения математического доказательства как основного результата математического творчества, а эвристические рассуждения рассматривает всего лишь как нечто вспомогательное, вторичное, само по себе не истинное, а всего лишь похожее на истину, правдоподобное. С таким контекстом в целом можно согласиться, однако не следует забывать, что все математические доказательства вначале были «всего лишь» эвристическими рассуждениями, содержащими догадку. Понятно, что при такой роли эвристики в развитии математики, как бы мы эвристику не называли, ее изучению должно уделяться самое серьезное внимание.

Конечно, в данном контексте неизбежно возникает вопрос о построении универсальной эвристической стратегии, т. е. такой стратегии, которая обеспечивала бы успешный эвристический поиск для любого класса задач. Однако Дж. Пойа признает, что «установить безотказно действующие условия или правила эвристики, которые позволили бы решать все математические задачи, не может быть целью разумной эвристики, но эвристика (имеется в виду эвристика как часть методологии, точнее исследования эвристики – прим. автора) может стремиться изучить типы, приемы и процессы (умственные операции, ходы, шаги), полезные при решении задач.»[3]. Эвристика по сути своей, по определению, не может быть универсальным алгоритмом. Эту мысль подтверждает и обращение к работам основателя кибернетики Н.Винера, считавшего, что «последовательности мыслей не согласуются с законами логики ...»[8]. Как бы ни была эффективна эвристическая стратегия того или иного математика, необходимо понимать, что никакая эвристика не может отменить необходимость зачастую мучительного поиска догадки, и любая эвристика содержит обращение к математической интуиции. Для того, чтобы показать наиболее принципиальное отличие эвристических методов от методов строго-математических, то есть максимально приближенных к алгоритмам, постараемся выяснить наиболее характерные моменты необходимого подключения интуиции в процессе решения математических задач.

Для реализации этой цели разберем решение задачи по нахождению формулы общего члена последовательности «0, 3, 6, 9, ..., a(n), ...». Постараемся на этом простейшем примере, знакомом всем по школьному курсу алгебры, показать, что, несмотря на его очевидную простоту, тем не менее, его решение не обошлось без вмешательства интуиции.

Согласно условиям задачи необходимо выразить любой член указанной последовательности a(n) через его порядковый номер n, где n равно 1, 2, 3, и т. д. Используем метод математической индукции, при котором сначала ищется формула для n-го члена последовательности, а затем доказывается ее истинность для n+1-го члена этой же последовательности. Поиск закономерности, которой подчиняются члены последовательности, происходит на основе эвристических соображений, поскольку при этом невозможно опираться на какой-либо алгоритм. Это значит, что в этот момент процесса решения данного примера, алгоритм решения разрывается, и, следовательно, мы имеем право квалифицировать этот момент как момент вмешательства интуиции в процесс решения задачи.

В целом можно сделать вывод о необходимости вмешательства интуиции в процесс решения математических задач в следующих ситуациях: 1) при конкретизации эвристических приемов и методов, то есть при их интерпретации в свете условий конкретной задачи; 2) при распространении уже известной эвристики на другой тип задач, нехарактерный для данной эвристики; 3) при перенесении на математику эвристики, применяющейся в других науках, например, в физике; 4) при смене эвристических приемов [5].

Важно отметить, что, несмотря на очевидную важность исследования значения интуиции как движущей силы эвристического процесса в математике, одним только этим ее роль в развитии математики не исчерпывается. Для дальнейшего раскрытия роли интуиции в математическом познании мы вновь обратимся к работам А. Пуанкаре. Относительно математического доказательства А. Пуанкаре, в частности, утверждает следующее: «Когда логик разложил всякое доказательство на множество элементарных операций, вполне правильных, он еще не уловил реальности в ее целом; то неизвестное мне, что составляет единство доказательства, совершенно от него ускользнуло ... Но общий взгляд не дается нам чистой логикой, чтобы получить его, мы должны обратиться к интуиции.»[1]. Это значит, что согласно выводам А. Пуанкаре математическая интуиция, кроме открытия нового знания, еще и «собирает» математическое доказательство как единый упорядоченный процесс, обуславливая в нем вполне определенный порядок этапов, от первого до последнего, то есть от предпосылок до окончательных выводов.

Итак, роль математической интуиции в развитии математики трудно переоценить. Но, как здесь уже отмечалось ранее, исследование роли математической интуиции в математике не должен ограничиваться только изучением ее как движущей силы математического творчества. В философии и методологии математики принято рассматривать математическую интуицию еще и как наглядное созерцание. Согласно А. Пуанкаре, в этом качестве математическая интуиция необходима, «чтобы заполнить пропасть, которая отделяет символы от реального мира» [1], и, следовательно, именно благодаря математической интуиции «мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром ...» [1]. В самом деле, мы свободно пользуемся математическими символами, такими, как знаки математических действий, цифры, при этом не восстанавливая каждый раз (ни логически, ни на уровне подсознания) весь ход исторического процесса формирования этих математических символов. Подробнее специфика математической символизации будет проанализирована здесь позже.

Кроме того, сегодня в ряде работ по проблемам философии математики выделяется так называемая *топологическая* интуиция как отдельный тип интуиции, отличный от интуиции собственно математической [9]. Представляется, что использование нового термина правомерно рассматривать как выражение философско-методологического стремления к полному отделению топологической интуиции от интуиции математической, причем несмотря на то, что топология по определению является областью математики. Для того чтобы разобраться в природе топологической интуиции и выяснить, является ли введение нового термина принципиально необходимым, рассмотрим основные принципы, положенные в основу этой относительно новой области математической науки. Всю важность идей топологии для современной математики хорошо осознавал, например, французский математик второй половины двадцатого столетия А. Вейль. Согласно его выводам вся современная математика в целом представляет собой причудливое переплетение идей топологии и алгебры. Специфика топологии как области современной математики связана с определенными особенностями преобразования фигур в пространстве. Основными понятиями в топологии являются понятия гомеоморфизма и конгруэнтности. Говорят, что фигуры конгруэнтны, если расстояния между их соответствующими точками равны. Гомеоморфизм в топологии представляет собой отображение без разрывов, склеиваний, а также без образования складок. Основной идеей топологии является идея непрерывности.

Специфика топологической интуиции связана с формами и расположением фигур в пространстве. Это значит, что топологическая эвристика, то есть эвристика, применяемая в топологии, должна быть связана с топологическими преобразованиями фигур, то есть со свойствами фигур, не меняющимися при гомеоморфизмах, и должна включать в себя такие приемы, как растяжение и сжатие фигур. Сама топология «работает» в пространстве, и предполагает введение таких понятий, как узлы, расслоения, накрытия. Мы получим, например, топологическое преобразование фигуры, если будем деформировать ее как угодно, лишь бы при этом не происходило разрывов и склеиваний. Так, окружность может деформироваться в эллипс, в овал неправильной формы, в многоугольник – то есть в любую простую (без двойных точек) замкнутую линию. При такой деформации окружность не может превратиться в незамкнутую линию, так как для этого ее пришлось бы разорвать; или в лемнискату (восьмерку), поскольку для этого пришлось бы соединить две ее точки в одну, то есть произвести запрещенное в топологии «склеивание». Точно также, при помощи топологических преобразований, сферу можно превратить в поверхность эллипсоида, куба и т.п., однако ее нельзя превратить, например, в тор.

Из приведенных примеров должно быть понятно, что топологическая эвристика – это действительно качественно новая эвристика в математике, которая в отличие от прежней эвристики, не связанной с пространственными преобразованиями, проводит достаточно свободные преобразования фигур в пространстве, пусть и ограниченные определенными условиями. К эвристическим операциям в топологии мы можем отнести «склеивание», посредством которого уничтожаются дыры; а также различного рода «разрезы», например, триангуляцию – разрезание фигуры на некоторое число связанных между собой треугольников. Кроме того, возможно передвижение различных одномерных фигур на поверхности преобразуемых пространственно- топологических фигур.

Представляется, что практически любая фигура в рамках какой-либо другой геометрии (например, аффинной, дифференциальной и т.д.) может рассматриваться и как некоторое топологическое пространство. Это значит, что в определенном смысле, в математике топология является наиболее обобщающей геометрией, однако многие свойства фигур, которые исследуются в других геометриях, сознательно игнорируются в топологии. В элементарной геометрии, это, например, свойства углов треугольника. Пожалуй, единственным топологическим свойством фигур элементарной геометрии является свойство биссектрис углов треугольника пересекаться в одной точке.

Отметим еще одну интересную операцию топологической эвристики – топологическое перемножение, в соответствии с которым евклидова плоскость – это произведение двух прямых, а произведение двух окружностей – поверхность тора. Однако представляется, что при всех качественных отличиях от рассмотренной здесь ранее математической эвристики, эвристика топологическая обусловлена интуицией, связанной с абстрактными объектами, то есть интуицией математической. При этом топологическая эвристика несводима к какой–либо иной, то есть не топологической математической эвристике, кроме эвристики элементарной геометрии. Вообще абстракции топологии для непривычного к ним математика требуют значительно большего интуитивного усилия, чем абстракции какой-либо из непространственных геометрий, особенно если изучать топологию позже таких геометрий. Вместе с тем необходимо хорошо понимать, что объекты топологии – это абстрактные объекты, и, следовательно, они должны быть связаны с интуицией абстрактных объектов, то есть с интуицией математической. Единственное, что позволяет выделить топологическую интуицию как качественно иной тип математической интуиции – то, что объекты приложения топологической интуиции находятся в пространстве (в пространстве находятся и объекты стереометрии). Способствует выделению топологической интуиции как отдельного типа математической интуиции также то, что, по определению топологии, операции с топологическими объектами должны удовлетворять определенной специфике – а именно, не должны деформироваться.

Интересно, что представление о свойстве подобия геометрических фигур, лежащее в основе топологической интуиции, согласно исследованиям Ж.Пиаже, априорно, то есть доопытно. Этот вывод делается Ж. Пиаже на основании исследования мышления семилетних детей, которые с топологическими объектами справляются едва ли не легче, чем с объектами евклидовой геометрии[10]. Представляется, что при переходе к другой системе операций – что как раз и происходит при переходе от геометрии к топологии – у субъекта как бы «включается» другой тип интуиции. Эта интуиция связана с абстрактными объектами, но в то же время способна к пространственным преобразованиям, что характерно для интуиции топологической. Очевидно, что этот вид математической интуиции имеет дело с более сильными абстракциями, чем традиционно понимаемая математическая интуиция, то есть интуиция не топологическая, хотя, согласно исследованиям Ж. Пиаже, нельзя утверждать, что интуитивное усилие, требующееся для работы с топологическими объектами, так же должно быть более серьезным. Тем не менее, можно предположить, что вследствие своей качественной новизны топологическая эвристика менее доступна для какой-либо рационализации. При этом крайне важным представляется уже тот факт, что топология позволяет значительно разнообразить арсенал эвристических приемов и методов математики, что, в первую очередь, относится к элементарной геометрии. Под рационализацией топологической эвристики здесь имеется в виду, прежде всего, «перевод» топологической эвристики на «язык» евклидовой геометрии. Представляется, что рационализация топологической эвристики позволяет сблизить в некотором отношении интуицию топологическую как абстрактно-пространственную, с интуицией пространственно-художественной, связанной с архитектурой и живописью, поскольку важнейшая в топологии «идея непрерывности интуитивно выражает коренные свойства пространства и времени и имеет, следовательно, фундаментальное значение для познания» [11, с. 394].

До образования топологии как области современной математики пространственная интуиция проявлялась в основном на художественном уровне, где ее проявления, конечно же, требовали исключительной конкретности, и не могли быть абстрактными, как в топологии. Эта особенность топологической интуиции позволяет предположить, что, в конечном счете, все виды интуиции, свойственные человеку, взаимосвязаны, и человек способен в силу исторической логики познания осознать эту связь. Эта особенность топологической интуиции эвристическим образом также проливает некоторый свет на так называемую «непостижимую эффективность математики» по отношению к естественным наукам, в основном к физике.

В данном контексте неизбежно возникает вопрос о возможности проведения полной и окончательной рационализации результатов деятельности математической интуиции – то есть полного и окончательного перевода интуитивных догадок, полученных в результате деятельности математической интуиции во время эвристического процесса в дискурсивные, то есть доказательные, рассуждения – тем более, что последним этапом эвристического процесса в математике является этап проверки, во время которого, по определению, осуществляется максимально возможный перевод интуитивных рассуждений в доказательные. Эта особенность эвристического процесса в математике позволяет в известной мере говорить о некоторой схожести структуры интуитивных и дискурсивных рассуждений. Однако это сходство относится скорее к содержанию рассуждений, чем к их форме. В самом деле, если целью некоторого эвристического процесса будет решение конкретной задачи, то содержанием любых размышлений – как интуитивных, так и дискурсивных – будет содержание этой задачи. Разумеется, это не значит, что исключительно по этой причине интуитивные рассуждения могут быть полностью переведены в дискурсивные. Подводя первые предварительные итоги всех наших предыдущих рассуждений, мы должны признать эту задачу именно в такой постановке неразрешимой.

Дело в том, что, по сути своей, такая рационализация не может быть ничем иным, как только дальнейшим, причем неоднократным, развитием или углублением математического доказательства. При этом работа интуиции необходима, во-первых, для получения интуитивных суждений, и, во-вторых, для перевода интуитивных суждений в дискурсивные, то есть для углубления интуитивно полученной идеи математического доказательства. Это значит, что такая рационализация есть ни что иное, как творческий процесс, при котором осуществляется дальнейший перевод некоторых «порций» интуитивных рассуждений в рассуждения дискурсивные. Каждая «порция» интуитивных рассуждений при этом преобразуется в дискурсивные во время единого повторения доказательства. В целом же вся рационализация по отношению к одному конкретному доказательству представляет собой мыслительный творческий процесс, который можно охарактеризовать как *многослойный.* Таким образом, можно утверждать, что математическое обоснование как одна из главных процедур математического познания, обладает свойством многослойности. Многослойность как свойство математического обоснования означает, что, при рационализации математического доказательства, к уже имеющимся нерационализированным остаткам работы математической интуиции всегда будут добавляться новые, такие же нерациональные, то есть интуитивные, элементы, которые, как бы наслаиваясь друг на друга, вступают с уже существующими нерационализированными элементами математического доказательства во взаимодействие.

Можно заключить, что деятельность интуиции в процессе процедуры математического обоснования носит двойственный характер: с одной стороны, способствует рационализации интуитивных элементов математического доказательства, а с другой стороны – ее же и осложняет, поскольку продуцирует новые. Контекст обоснования, как это следует из проведенных рассуждений, также не свободен от вмешательства интуиции. Поэтому контекст математического обоснования не является сугубо логическим и алгоритмическим. Да, загадка интуиции существует, и она отнюдь не открывается в процессе исследования ее специфики. В процессе этого исследования проясняется специфика самой математической науки, что, как представляется, также немаловажно.

Несомненно, пожалуй, здесь одно – интуиция не только необходимым образом участвует в математическом творчестве, результатом которого является новое математическое знание, но и является важным фактором математического обоснования, при котором осуществляется рационализации интуитивных элементов математического знания. Как явствует из проведенных исследований, роль интуиции в развитии математики представляется еще более серьезной и основополагающей, чем это признавалось ранее.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пуанкаре А. *О науке.* М.: Наука, **1990**.
2. Адамар Ж. *Исследование психологии процесса изобретения в области математики.* М.: Советское радио, **1970**.

3. Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения*. М.: Наука, **1957**.
4. Пойа Д. *Как решать задачу*. М.: Учпедгиз, **1959**.
5. Ильясов И. И. *Система эвристических приемов решения задач*. М.: Изд-во Российского открытого университета, **1992**.
6. Полани М. *Личностное знание*. М.: Прогресс, **1985**.
7. Ван-дер-Варден. *Пробуждающаяся наука*. М.: Физматгиз, **1959**.
8. Винер Н. *Кибернетика*. М.: Наука, **1958**.
9. Панов М. И. Интуиция в математическом познании // *Философские методологические семинары*. М.: Наука, **1984**.
10. Пиаже Ж. Генезис числа у ребенка // *Избранные психологические труды*. М.: Международная педагогическая академия, **1994**. С. 292–410.
11. *Математическая энциклопедия*. Т. 3. М.: Сов. Энциклопедия, **1982**.
12. Perminov, V. Metaphysics and the foundations of mathematics // *Russian Studies in Philosophy*. **2012**. Vol. 50. Is. 4. Pp. 24–42.

*Поступила в редакцию 22.05.2013 г.*

## INTUITION AND HEURISTICS IN MATHEMATICS

**© L. B. Sultanova**

*Bashkir State University*
*32 Z. Validi Street, 450074, Ufa, Russia.*
*Phone: +7 (347) 229 96 64.*
*E-mail: sultanova2002@yandex.ru*

The article is devoted to philosophy of mathematics. Mathematical heuristics, being a complex of methods for solving the non-standard problems of mathematics (such problems which have no known algorithms to be solved), is the main subject of the research. As a specific mechanism for thinking, generating elements of guesswork needed as the basis of mathematical heuristics, the author considers intuition. In the work, the author uses Descartes's, Poincaré's, Hadamard's and Piaget's findings. Based on Descartes's concept of rational intuition, the author develops the concept of heuristic intuition. As a result, the author turns to the question of possibility of a complete translation of the user-derived mathematical statements in a discourse, in fact, that means a maximum depth of mathematical proof, i.e. its maximum rationalization. For this purpose, it is necessary to re-attract the intuition since it is able to transform the intuitive elements into the discourse ones. Therefore, from this point of view, the rationale is intuitively derived mathematical proof should be no more than a "multilayer" creative process. In general, the author, based on Poincaré's research, proves that the essence of mathematical creativity is not to «sort out» and «choose». Referring to examples for illustration, the author reveals moments of «interference» of intuition, even in the process of solving school problems. Therefore, it is currently impossible to ignore the phenomenon of intuition and the results that have been historically derived a theory of knowledge in the study of creative mechanisms.

***Keywords:*** *mathematical heuristics, rational intuition, heuristic intuition, insight, rationalization of mathematical heuristics, moments of "interference" of intuition, "recognition heuristic", "multilayer" heuristic process of justification in mathematics.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Sultanova L. B. Intuition and Heuristics in Mathematics // *Liberal Arts in Russia.* **2013**. Vol. 2. No. 3. Pp. 237–251.

## REFERENCES

1. Puankare A. *O nauke [About Science].* Moscow: Nauka, **1990.**
2. Adamar Zh. *Issledovanie psikhologii protsessa izobreteniya v oblasti matematiki [Research of Psychology of Invention Process in the Field of Mathematics].* Moscow: Sovetskoe radio, **1970.**
3. Poia D. *Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya [Mathematics and Plausible Reasoning].* Moscow: Nauka, **1957.**
4. Poia D. *Kak reshat' zadachu [How to Do an Exercise].* Moscow: Uchpedgiz, **1959.**
5. Il'yasov I. I. *Sistema evristicheskikh priemov resheniya zadach [Heuristic methods of Doing Exercises].* Moscow: Izd-vo Rossiiskogo otkrytogo uni-versiteta, **1992.**
6. Polani M. *Lichnostnoe znanie [Personal Knowledge].* Moscow: Progress, **1985.**
7. Van-der-Varden. *Probuzhdayushchayasya nauka [Awakening Science].* Moscow: Fizmatgiz, **1959.**
8. Viner N. *Kibernetika [Cybernetics].* Moscow: Nauka, **1958.**
9. Panov M. I. *Filosofskie metodologicheskie seminary.* Moscow: Nauka, **1984.**
10. Piazhe Zh. *Izbrannye psikhologicheskie trudy.* Moscow: Mezhdunarodnaya pedagogi-cheskaya akademiya, **1994.** Pp. 292–410.
11. *Matematicheskaya entsiklopediya [Encyclopedia of Mathematics].* Vol. 3. Moscow: Sov. Entsiklopediya, **1982.**
12. Perminov V. *Russian Studies in Philosophy.* **2012.** Vol. 50. Is. 4. Pp. 24–42.

*Received 22.05.2013.*