DOI: 10.15643/libartrus-2021.1.2

Методологическая направленность эвристических стратегий в когнитивном осмыслении математического анализа

© В. А. Еровенко

Белорусский государственный университет
Беларусь, 220030 г. Минск, проспект Независимости, 4.

Email: erovenko@bsu.by

Философская рефлексия методологической направленности эвристических приемом и методов познания помогает выявить сущность математических понятий, способы конструирования математических объектов и обогатить представления о математической картине мира, углубляющих предмет собственных философско-методологических исследований в философии математического образования. Хотя эвристические идеи давно используются в философских исследованиях, использование эвристического вида деятельности в математике по-своему способствует раскрытию процесса постановки новой задачи и поисков ее решения. В работе предпринята попытка философско-методологического анализа мало изученной темы эвристических стратегий математики в контексте когнитивного осмысления проблем философии математики и рефлексивного анализа проблемно-ориентированных тем математического анализа. В эвристических подходах к высшей математике в отличие от методологических приемов алгоритмического типа, ориентированных на формально-логический анализ, эвристические приемы направляют мысль на содержательный анализ математических проблем, стимулирующих интуитивное мышление при решении новых задач. Наряду с пониманием математического анализа как наиболее сложной части высшей математики, а также в связи с расширением области его применений особое внимание обращено на проблему обоснования математического знания. Методологическую значимость рефлексии по поводу эвристических методов в изучении разделов и направлений математического анализа можно охарактеризовать как поиск нового подхода к пониманию формализации когнитивно-исследовательской творческой деятельности, который становится в социокультурных условиях развития общества важной составляющей современной системы университетского математического образования различных профессионально необходимых уровней строгости.

Ключевые слова: *философия математики, методология математики, математический анализ, эвристические стратегии в математике, когнитивные трудности понимания.*

Введение

Математический анализ, занимающий центральное место в курсе высшей математики, требует для его понимания напряженной мыслительной деятельности. Философия математического образования по-своему раскрывает специфику математического анализа, методику и неординарность математического познания. Математический анализ – это «анализ бесконечного», изучаемого, с одной стороны, «в малом», в операции дифференцирования, а с другой – «в большом», в операции интегрирования, но корректно их сущность можно определить с помощью понятия «предела». Благодаря высокой культуре исследований, реализовывавших

вейерштрассовские стандарты обоснования, математический анализ стал доминантой математического образования. С точки зрения методологии, курс математического анализа обладает мощным потенциалом. Его отличают тщательная философско-математическая продуманность и системная целостность всего курса, совершенствованием которого занимаются до сих пор. Поэтому задача критической рефлексии и понимания системы определений и доказательств теорем математического анализа остается актуальным направлением философии математики.

В контексте философии математического образования к этой тематике относятся когнитивные технологии формирования эвристического мышления при изучении математического анализа. Зарождению эвристики философия образования обязана диалогам Сократа, направленным на математическое познание. Использование эвристики облегчает поиск метода доказательства математического утверждения или выявление способа его опровержения, а также выбора ответа на нестандартный проблемный вопрос. В фундаментальном математическом образовании математической анализ методологически насыщен примерами и контрпримерами, способствующими проверке утверждений на правдоподобие, что актуализирует значимость анализа при выработке эвристических стратегий. Философ Мераб Мамардашвили говорил, что «анализу поддается только то, что может быть нами создано». Поэтому эвристические подходы, преодолевающие когнитивные трудности математического познания, можно проанализировать. Заметим также, что критическое мышление в стремлении к убедительной аргументации и пониманию математического анализа в процессе выявления нового смысла начинается с постановки когнитивных вопросов, выясняющих сущность понятий и утверждений.

Специфика образовательного процесса в университете с точки зрения применения эвристических приемов и методов обучения обусловлена тем, что понимание математики связано с реконструкцией математических утверждений, которые уже кем-то созданы, и в этой познавательной ситуации оно пассивно, хотя может способствовать для обучаемых порождению нового смысла сложного математического понятия, становясь тем самым предпосылкой критического мышления. Применение эвристических методов в математическом анализе – это не только эффективное средство исследования «математических лабиринтов», но еще и увлекательная методологически направленная интеллектуальная деятельность. В контексте обсуждения наследия Д. Пойа особое внимание обращается на «феномен педагогической эвристики» при изучении математического анализа, т.к., с одной стороны, эвристика направлена на поиски решения нестандартных задач математики, а с другой стороны, – педагогической эвристики как научного направления в философии математического образования еще нет, хотя она изучает, как решать задачи.

Методология и когнитивная специфика эвристических стратегий

Наш подход к методологии эвристических стратегий изучения математического анализа основан на актуализации понимания того, что мы живем в изменяющихся социокультурных представлениях о востребованной методологии математического образования, изучающей методы, структуру и приемы логической организации познания, с помощью которых обосновывается новое математическое знание. Использование термина «методология», а не термина «методика», обусловлено тем, что методика применения какого-нибудь математического метода, как правило, сводится к разъяснению технологии реализации этого процесса, тогда как

методология рассматривает когнитивные подходы как совокупности различных принципов познания. К методологии математического познания относится системное изучение эвристики. Математику и философию объединяет стремление к системности научного знания, но это не означает наделения математических понятий статусом философских категорий, приводящим к ошибочным выводам. «Причина их, как правило, заключается в концептуальной ошибке – неразличении дисциплинарных оснований философских и общенаучных понятий в процессе решения общей исследовательской проблемы, игнорирования законов существования различных систем дисциплинарного знания» [1, с. 51]. Философская рефлексия математического познания показывает, что математическая логика, проверяющая на истинность, является его основой, и в ее рамках были поставлены и решены математиками проблемы, связанные с обоснованием математики.

В когнитивном смысле более широкая интерпретация определения методологии математики состоит в ее понимании как философского учения о всей совокупности методов исследования, применяемых в современной математике, поскольку во всех случаях приходится работать с математическими абстракциями, формальными схемам рассуждений и проблемными математическими моделями. С точки зрения эвристического потенциала математического исследования, нельзя не заметить широкого распространения в философии математического образования таких терминологических понятий, как «эвристическое мышление», «эвристические приемы и методы», «педагогическая эвристика» и других, связанных с методологией научного творчества, выявляющего смысл, а не строгую закономерность. Основой эвристической деятельности является психология творческого мышления, включающая логические и интуитивные средства. Эвристическое рассуждение нельзя отождествлять с окончательным, алгоритмически обоснованным и математически строгим, т.к. это предварительное рассуждение, облегчающее поиск решения проблемной задачи при выявлении смысловых коннотаций сложного математического понятия. При эвристическом подходе акцент делается именно на проблемной ситуации, раскрывающей борьбу мнений в математическом познании. Хотя эвристические рассуждения не гарантируют достижения математической истины, поскольку их область исследования, относящаяся к логике, методологии и философии, по существу, не очень четко очерчена, но тем не менее эвристические методы познания творчески репрезентируют стиль математического мышления, делая его системным и целенаправленным.

Эвристика, зародившаяся в Древней Греции, долгое время оставалась единственным методом поиска решения задач при рассмотрении возможных вариантов их решения. В наше время значительным событием в области методологии преподавания математического анализа стали книги Джорджа Пойа, которому принадлежит краткое и четкое определение эвристики как «науки о том, как делать открытия». Для изучения основ математического анализа востребована новаторская книга Джорджа Пойа и Габора Сеге «Задачи и теоремы из анализа», побуждающая к самостоятельной мыслительной работе и отличающаяся своей целью и методом работы с ней. Особая заслуга принадлежит Пойа в разработке эвристической деятельности в серии книг, посвященных математическому творчеству, в которых обсуждалась новаторская задача – исследовать методы, ведущие к математическим открытиям. В элементарной книге «Как решать задачу» Д. Пойа, который считает решение математических задач «специфическим достижением разума» и рассматривает эвристику как особую отрасль знания, раскрывается структура мыслительного процесса, лежащая в основе поиска нестандартных решений. Часто цитируют следующее его заключительное утверждение: «Эвристическое

рассуждение не рассматривается как окончательное и строгое, но лишь как предварительное и правдоподобное рассуждение, цель которого найти решение для данной проблемы» [2, с. 208]. Смысловой акцент у Пойа делается на вспомогательных рассуждениях, которые содержат эвристически ценную догадку.

Если представить этапы решения математической задачи как потенциально возможных решений, то может оказаться немалое количество вариантов, среди которых эвристичностью обладают вероятные или правдоподобные рассуждения, приближающие в итоге к правильному решению. Хотя правдоподобные рассуждения с точки зрения «чистой математики» не всегда приемлемы, но если в педагогических целях отнестись к ним «доброжелательно» и не отвергать изначально, то они могут нести полезную информацию. В своей второй книге «Математическое открытие» Д. Пойа, развивая свою концепцию математического мышления, утверждает, что его нельзя считать исключительно формальным. «Математическая формализация, как „шагреневая кожа“, в большинстве случаев дает не то, что от нее ждут» (В. Босс[1]). Математическое мышление базируется не только на аксиомах, определениях и строгих доказательствах, как отличительного признака математики, но и включает в себя такие эвристические подходы, как аналогия, индукция, обобщение и многое другое. Вопрос еще состоит в том, какого уровня строгости следует придерживаться при проведении математических доказательств с использованием эвристических стратегий? Наверное, только математику доставляет профессиональное удовольствие прослеживать формальное обоснование всей цепочки математических рассуждений. Третья превосходная книга Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения», доступная даже студентам младших курсов университетов, посвящена эвристике, основное назначение которой – выяснить роль правдоподобного рассуждения в математическом творчестве, т.е. в ней обсуждаются логические схемы построения правдоподобных умозаключений как первого шага к строгим логическим доказательствам.

Знание современных стилей математического мышления тоже обладает эвристической ценностью, поскольку прилагательное эвристический методологически раскрывается как «служащий для открытия» в начале поиска математической истины, т.е., по существу, эвристика – это метод открытия или процедура предварительного оценивания. «Традиционно под математической эвристикой понимают совокупность эвристических средств, т.е. приемов, методов и процедур математики, применяющихся при доказательстве теорем и решении сложных нестандартных задач, для которых не существует стандартных отработанных алгоритмов» [3, с. 242]. Методологическая функция математической эвристики направлена на решение проблемно-ориентированных задач как когнитивного средства развития мыслительных операций анализа и синтеза и различных ответов на правильно поставленные вопросы, где в контексте анализа основной вопрос – что надо знать для ответа на вопрос, а с точки зрения синтеза – что можно понять из данных условий, помогающих решать нестандартные задачи. Поэтому надо научить задавать эвристические вопросы, вырабатываемые по ходу самостоятельного решения математических задач при овладении методологическим искусством анализа и синтеза. Заметим, что «поисковая эвристика» в авторской разработке эффективного решения задач математического анализа, как мощного инструмента научного предсказания,

[1] В. Босс – творческий псевдоним профессионального математика, доктора физико-математических наук, профессора В. И. Опойцева, автора 16 томов популярных книг «Лекции по математике», способствующих в афористичном обзорном стиле методологическому пониманию проблемного материала из разных разделов высшей математики.

не носит алгоритмический характер и поэтому не является стандартным подходом. Каждый математик, занимающийся исследованиями, способен выработать в поисковой эвристике собственную стратегию, зависящую от тематики его научных исследований, поскольку эвристические и научные методы не противоречат, а даже, по сути, дополняют друг друга.

Но как бы ни была эффективна индивидуальная эвристическая стратегия, генерирующая идеи, не согласующиеся с законами логики, в процессе решения проблемных математических задач вынуждена обращаться к интуиции. О методологической связи интуитивного мышления и эвристических методов решения задач говорили многие известные педагоги, не анализируя при этом структуру эвристики в математике, в частности, интуиция в вероятности часто бывает ошибочной. Поэтому одной из целей философского анализа математического познания является исследование соотношения логического и интуитивного знания в контексте педагогической эвристики, способствующей осознанию главных идей математического анализа при выведении интуитивных рассуждений на уровень логической аргументации. Формальная интуиция некоторых математических понятий порождает неприятные головоломки, хотя формализация определений здесь вовсе не виновата, т.к. впечатление ясности часто обманчиво, например, когда речь идет о строгом определении непрерывности функции в точке на языке «эпсилон – дельта». Методический опыт показывает, что некоторые содержательно насыщенные понятия математического анализа имеют геометрическую интерпретацию и требуют для их понимания значительных усилий, поэтому правильные интуитивные представления при реализации этого процесса появляются после основательного анализа и рефлексии с помощью решения специально подобранных математических задач, а также нестандартных примеров или контрпримеров.

Важным видом деятельности студентов при обучении понимаемому математическому анализу является решение задач, способствующих формированию эвристического мышления. Как правило, стандартные задачи связаны с математическими утверждениями, которые их практически иллюстрируют. Но нестандартные задачи и утверждения с глубоким математическим содержанием раскрывают понимание такого эвристического приема, как доказательство эквивалентного утверждения или поиск эквивалентных свойств, которые в более общих условиях выявляют продуктивные понятия. Он используется при определенных затруднениях доказательства прямых математических утверждений, «поскольку прямое утверждение и утверждение, обратное противоположному, – равносильные утверждения» [4, с. 131]. К указанным эвристическим приемам исследования добавим операцию предельного перехода и рассмотрение предельных случаев, эффективное использование математической индукции, переход к более общей по постановке проблемной математической задачи, использование различных степеней аналогии для достижения математической точности, преобразование математической информации с помощью введения вспомогательных переменных, вспомогательных функций и вспомогательных уравнений, решение математической задачи с помощью переформулировки условий на более удобном языке. Эвристический прием обобщения «идеализация» является одной из причин, благодаря которой математика реально работает, т.к. в идеализированной математической модели уже можно рассуждать логически. К эвристическим методам можно еще отнести и математический эксперимент, поскольку эмпирические закономерности, где замечательным примером является дельта-функция, служат выявлению логической основы для решения новых математических проблем.

В стандартных курсах математического анализа редко обсуждаются методологические вопросы поиска способов доказательства математической теоремы и методы решения

нестандартных проблемно-эвристических задач, способствующих пониманию дифференциального и интегрального исчисления, как главного в математическом анализе. «Мир, оказывается стоит не на трех китах, а на дифференциальном исчислении» (В. Босс). Математический анализ, сложный сам по себе в связи с доказательством теорем, является основным курсом не только для студентов механико-математических факультетов, но и для естественно-научных направлений образования, поскольку понимание разделов анализа необходимо для успешного продолжения обучения. Кроме того, очень трудно изучать новые темы математического анализа, если предыдущие были пропущены или не поняты. Курс математического анализа имеет сложную систему обозначений, поэтому поддержание стандарта логической строгости потребовало критического пересмотра его определений, благодаря чему педагогическая эвристика позволяет изначально отвергать ошибочные математические гипотезы в контексте активизации познавательной эвристической деятельности. На примере развитых теорий математического анализа, по сути, видно, что с помощью языка математики не только выражают мысли, но, что еще важнее, с его помощью создаются условия возникновения математической мысли, начиная с утверждений, доступных пониманию.

Упрощая когнитивный смыл, можно сказать, что весь математический анализ «базируется» на понятии предела. Эвристическая значимость предела и предельного перехода обусловлена тем, что его репрезентируют как важнейший, или даже единственный, инструмент строгого обоснования математического анализа. Определение предела – это «математическая поэма», написанная в прозе на условном языке «ε–N». Не каждый человек поймет простое определение предела последовательности, записанное на формальном языке, с первого раза. «Легендарная „заумность“ этого определения (наравне с ε, δ – определением непрерывности) широко известна. С виду формулировка очень проста, но у многих не укладывается в голове. Словно попадает в зону какого-то слепого пятна. Причем, если „не укладывается“, то математикой, говорят, лучше не заниматься. Как бы лакмусовая бумажка. Но это не так. Опыт показывает, что разным людям просто требуется разное время на освоение» [5, с. 20]. В символической записи определения предела числовой последовательности есть три фиксированные позиции, на которых определенным образом располагаются «квантор общности» ∀ и «квантор существования» ∃. Заметим, что таким образом, в символической записи имеется 2^3 = 8 способов расположения этих кванторов, включая их правильное расположение из определения. Эвристический подход к уяснению этого определения показывает, что оставшиеся 7 вариантов ошибочны. Методологическая ценность такого эвристического подхода обусловлена еще и тем, что с понятием предела в математическом анализе нельзя связать никакой алгоритм его нахождения.

Эвристические умения при изучении основ математического анализа формируются во время выполнения проблемно-ориентированной эвристической деятельности. Например, понятие предела последовательности или функции как эвристический прием лежит в основе курса математического анализа, т.к. нахождение первой производной, определенного интеграла и суммы бесконечного ряда базируются на понимании операции предельного перехода. Определенные трудности связаны еще и с необходимостью определять существование предела, а иногда и с отсутствием формульно-аналитического выражения предела. В контексте такого эвристического метода как аналогия, т.е. умозаключения на основании терминологического сходства двух исследуемых объектов, обратим внимание на эвристическую сущность повторных пределов в математическом анализе. Она чаще всего проявляется в завуалированном виде понятий производной и интеграла, когда от предельных переходов, лежащих в истоках

новых понятий, на выходе ничего неявного не остается. Это касается изменения порядка следования повторных пределов, которое, по сути, упирается в равенство повторных пределов, и где аналогия не достигает уровня математической точности. Например, понятие непрерывности функции двух переменных аналогично соответствующему понятию для функции одной переменной, но в отличие от последней точек разрыва у нее может быть бесконечно много. Кроме того, из существования предела функции двух переменных в точке эвристически, вообще говоря, не следует существования повторных пределов в этой точке. Аналогично, из существования и равенства повторных пределов функции двух переменных в данной точке, вообще говоря, не следует существования предела функции в этой точке.

Преподавателям математики постоянно приходится искать новые эвристические подходы к пояснению базовых понятий математического анализа, одним из которых является использование иллюстративных примеров и контрпримеров. Джордж Пойа считал, что «математика состоит из теорем и контрпримеров», поэтому эвристическое умение находить нужные контрпримеры для него не менее важно, чем умение доказывать теоремы. Согласно его определению, контрпример – это пример, удовлетворяющий условиям математического утверждения, но не удовлетворяющий его заключению. Во-первых, примеры и контрпримеры помогают формулировать и осмысливать абстрактную формулировку определений, а во-вторых, с их помощью можно проверять утверждение на их истинность. Поэтому эвристическая стратегия использования контрпримеров состоит в активизации понимания смысла вводимых понятий математического анализа и логики изложения материала. Но есть определенные трудности в эвристической методике нахождения контрпримеров к неправильным утверждениям. «Построение контрпримеров к неверным утверждениям имеет преимущество перед построением примеров функций с заданными свойствами, поскольку при построении контрпримеров мы имеем дело с опровержением, обоснованием, аргументацией, критическим мышлением, что составляет неотъемлемую часть математического способа мышления» [6, с. 86]. Заметим также, что если в математической теории хорошо подобранный пример подтверждает некоторую гипотезу, то фактически он лишь доказывает ее справедливость в частном случае, тогда как любой контрпример ее сразу опровергает, избавляя от дальнейших интуитивных ошибок при интеллектуальном восхождении по «лестнице математической абстракции».

В качестве классических примеров функций из математического анализа, использующих такую довольно сложную эвристическую процедуру аргументации, как контрпример, которая чувствительна к ошибкам, можно указать функцию Дирихле, разрывную в каждой точке; функцию Вейерштрасса, непрерывную, но нигде не дифференцируемую; функцию Кантора, непрерывную монотонную, но с производной, равной нулю почти во всех точках. Эвристический прием построения контрпримеров особенно полезен при анализе существенности условий теоремы, когда строится математический объект, обладающий всеми требуемыми свойствами, кроме одного, и показывается, что заключение теоремы для него неверно. Методологически эвристическая процедура, основанная на опровержении с помощью контрпримера, на что собственно и указывает приставка «контр», направлена на совершенствование когнитивной интерпретации математической эвристики при соответствующих мотивировках. «Разумеется, контрпримеры – штука приятная. Но когда их слишком много, то это уже из оперы „хороша болезнь склероз“ (ничего не болит, и каждый день новости)» (В. Босс). Поэтому нереалистично говорить о контрпримерах как главной методологической особенности математи-

ческого анализа, поскольку в исследовательской практике, особенно на уровне университетского образования, при формировании эвристического мышления, требующего знания и понимания математических понятий, в основном приходится сталкиваться с интуитивно ожидаемыми результатами.

Специфика эвристической методологии в образовательной деятельности проявляется еще в том, что она практически «высоко инструментальна», позволяя транслировать интеллектуальные образцы эвристической деятельности в математическом анализе на другие разделы высшей математики, не концентрируя внимание на математической строгости. Даже когда студенты начинают осваивать тонкости дифференциального и интегрального исчисления, составляющих основу математического анализа, их не учат математическому анализу на основе тех эвристических способов, с помощью которых его открывали Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц, использовавшие интуитивные понятия «флюксии» и «бесконечно малые величины», которые в обосновательных целях были заменены на понятие предел. Отметим, что Ньютон открыл анализ, отталкиваясь от смысла физических потребностей, не теряющих связь с реальностью, а Лейбниц – отправляясь от алгебраического подхода, направленного на формализацию математики. Поэтому от них идет условное деление на анализ-геометрию (или физику), связанную с физическим смыслом исследований, и анализ-алгебру, ограниченную рамками математических вычислений. «И заслугой Ньютона и Лейбница было то, что они, не располагая строгими доказательствами, решились все же двигаться вперед, получая все новые и новые результаты. Фактически „создание анализа“ состояло в алгебраизации рассуждений, т.е. в создании формальных правил, пользуясь которыми решение задач стало по силам даже людям, не понимающим их смысла (или не интересующимся этим смыслом)» [7, с. 40]. Возможно, эта преждевременная для изучения курса анализа «концентрация» математической строгости и точности делает математический анализ первоначально сложным предметом для изучения математически плохо подготовленными студентами.

При исследовании проблемных вопросов математического анализа может быть полезным такой эвристический прием, как предельный переход и рассмотрение полученных предельных случаев, что, в свою очередь, может оказаться полезным для изучения математических утверждений, близких к предельным или крайним ситуациям. Когда предельные переходы в математическом анализе выводят за пределы пространства непрерывных функций, то это дает эвристический импульс к изучению анализа в новом направлении с помощью понятия функционального пространства, что требует привлечения новых понятийных инструментов, например, интегрирования по Лебегу. Даже сама возможность интегрирования по Лебегу поднимает математический анализ на более высокий уровень обобщения ее теорий, позволяя строить логически строго обоснованные математические утверждения и стимулируя «спокойствие» и понимание. Эвристическая роль функциональных пространств методологически подобна обосновательной роли введения действительных чисел в математической анализ. Так, проблемы сходимости функциональных рядов удовлетворительно решаются в рамках функционального анализа, т.е. дисциплины, являющейся расширением математического анализа, способствуя «когнитивному оживлению» математики. Когда в функциональном анализе эвристически рассматривается пространство, в котором можно решить проблемную задачу, то тогда все «становится на свои места».

Заметим, что с помощью понятия «когнитивный», которым пронизано математическое мышление, часто акцентируется внимание на методологической сложности эвристического

анализа исследуемых процедур, поскольку признание эвристических элементов в математических рассуждениях потребует переписывания многих учебников по математическому анализу. При выявлении в философии математического образования инструментально-познавательных механизмов, как правило, обсуждается когнитивные трудности основных математических формализмов, которые содержат знание методологических основ эвристической деятельности, поскольку смысловые значения исходных понятийных терминов формально трудно воспринимаются, если они порождены математической интуицией. «К примеру, при решении эвристической задачи студент должен преобразовать представленную информацию, а затем подобрать средства, удобные для ее решения, обратиться к различным языкам представления математической информации» [8, с. 99]. При анализе эвристической составляющей проблемной темы часто нужна помощь преподавателя, который ознакомит студентов с образцами решений нестандартных задач. Но теоретические понятия профессионально ориентированной эвристической деятельности в математическом анализе пока не получили методологического осмысления. Решение проблемной эвристической задачи основано не на умении действовать по заданному алгоритму, а на таких когнитивных качествах, как рефлексивный взгляд на математические понятия и объекты через анализ их свойств, который выявляет полезность такого эвристического приема, как обобщение, при исследовании открытых вопросов. В частности, необходимость рассмотрения математического понятия «отображение» как методологической процедуры эвристического приема обобщения можно обосновать желанием охватить довольно большое число уравнений достаточно общей природы, записываемых в операторном виде.

Понятие рационального в математическом исследовании перестало быть обусловленным только лишь дедуктивной формой как методологической установкой на итоговый набор математических результатов и инструментальных техник, а стало включать в себя эвристику, рассматриваемую в широком философско-методологическом контексте. Владению эвристическими приемами и методами исследования в области математического анализа способствует самообразовательная деятельность студентов, нацеленная на открытие и понимание такого нового для него математического знания, как способности к саморазвитию. Формированию когнитивной компетенции способствуют эвристические задачи, предполагающие самостоятельный способ или метод их решений. Безусловно, стандартные задачи не только полезны, но и необходимы при изучении математического анализа, если они рассматриваются для понимания математических понятий и используются в «нужной дозе». Математические задачи иногда легче разобрать в области абстрактных рассуждений. Напомним, что в абстрактности математических понятий заключены сила и универсальность математического анализа, которые одновременно создают специфические когнитивные трудности их усвоения. «Инстинкт не дает ходу скороспелым абстракциям. Иначе голова окажется полна обобщениями, которые цитрамоном не лечатся» (В. Босс). Но у абстрактного мышления в математическом анализе не так уж много таких «опорных точек», как вполне естественная аксиома выбора, выделяющаяся таким шокирующим следствием, как парадокс Банаха – Тарского. Несмотря на все сказанное, укажем на следующие когнитивные умения, формируемые при их решении задач и облегчающие поиск решения. Например, испытание на правдоподобие с помощью использования аналогии и синтеза различных приемов исследования с опорой на математическую практику, влияющую на мотивацию профессиональной эвристической деятельности, открывают в когнитивном мышлении методологические закономерности использования эвристических методов.

По поводу качества математического образования и трудностей его реализации ученые и практики, высокая профессиональная компетентность которых не вызывает сомнения, высказывают настолько противоположные суждения, поэтому можно предположить, что эти причины имеют философско-методологический характер. Эвристика Пойа была одной из предпосылок философско-методологической концепции, в которой математическое мышление не сводится исключительно к дедуктивным рассуждениям в рациональных терминах «дедуктивистского подхода». Эвристические методы не являются ни точными, ни оптимальными стратегиями, т.к. они интуитивны и поэтому строго не обоснованы, хотя общие и специальные эвристические приемы могут облегчить успешный поиск решения задач, даже если они противопоставляются логическим методам точных результатов. Например, пользуясь инструментальными средствами математического анализа, «из любви к математике» можно построить пример непрерывной на промежутке функции, в которой точка нуль является точкой локального максимума, но ни в какой окрестности левее нуля она не является возрастающей и не является убывающей справа от нуля. Кроме того, если преподаватели математики снижают методологические требования к обоснованности математических утверждений, то тогда математические доказательства теряют свою методическую функцию. Глубина понимания математического утверждения появляется, когда оно раскрывается через определенную семантику, но тогда это уже относится к философии обоснования математики, приобретающей некоторую таинственность и многозначность при методологической обработке математического знания. Несмотря на успешное развитие и практическое применение математических теорий, разработанность философского обоснования математического и функционального анализа оставляет желать лучшего.

Математическое познание начинается с интуиции, в которой отражается предыдущий опыт мышления, основанный на доказательствах. Интуиция без такого опыта может обмануть, т.к. учебник математического анализа без доказательств похож на «поваренную книгу». Иногда интуитивное мышление способно навести на правильное решение и без строгого доказательства, но изучение курса математического анализа невозможно без самостоятельного решения задач, поскольку в процессе когнитивного продумывания математического учебного материала и его понимания вырабатываются правильные интуитивные представления о сложных абстрактных понятиях математического анализа, когда на смену логическим схемам и логическим критериям приходят такие правдоподобные рассуждения, как незаменимый метод педагогической эвристики, способствующий решению задач. На этом пути в философии науки есть свои когнитивные и методологические трудности. Так, хотя язык квантовой механики стал вполне приемлемым, позволяющим многое математически вычислять, у нее до сих пор нет правдоподобной картины мира. Как писал Джордж Пойа: «Никто еще не предложил ясного и убедительного метода вычисления правдоподобностей в нетривиальных случаях, и если мы ясно себе представим конкретные ситуации, в которых важна правильная оценка правдоподобностей… то мы легко сможем понять, что любое приписывание правдоподобностям определенных числовых значений подвергается большей опасности показаться глупым» [9, с. 368]. Правдоподобные рассуждения обладают особой эвристичностью, поскольку они направляют критическое мышление на сужение перебора вариантов, хотя нематематиков не учат отличать доказательства правдоподобных рассуждений.

В соответствии со сказанным к эвристическим подходам в математике относятся такие методы аргументации, которые основываются на не дедуктивных способах рассуждений,

используя определенные правдоподобные рассуждения для поиска истины. К категории правдоподобных выводов можно отнести индукцию, как процесс познания с помощью анализа и сопоставления частных случаев, начиная от самых простых и переходя к ситуациям посложнее для обнаружения решения проблемной задачи в общей постановке, и аналогию, основанную на сходстве характеристических признаков нескольких математических понятий, которой пронизано креативное математическое мышление. «Там, где речь идет о понятиях, разговор обычно короткий, глубин с ходу не видно – поэтому внимание переносится на результаты, где „что-то происходит“» (В. Босс). Например, формулам интегрирования суммы-разности функций можно найти определенные аналогии, хотя интеграл от произведения функций находить как произведение интегралов неверно. Эвристика, связанная с правдоподобными рассуждениями, выраженными в математических понятиях, способствует выбору таких методов исследования, с помощью которых проблемная задача будет решена методологически рационально. А те, кто ошибаются при решении нестандартной задачи или в доказательстве нетривиального утверждения, не становятся от этого «иррациональными», поскольку ошибаться могут только рационально мыслящие личности.

В огромном потоке декларативных работ, посвященных проблемам высшего математического образования, редко встречаются работы, в которых конкретная проблема преподавания связывалась бы с прояснением когнитивной природы математического знания, но если согласиться считать проблему как «осознанное противоречие», то тогда придется признать и ее эвристическую значимость. С помощью философско-рефлексивного анализа процесса обучения математическому анализу можно выявить определенную последовательность методических шагов, направленных на понимание математики, отражающуюся на качестве преподавания. Особая роль принадлежит «положительной эвристике», стремящейся распространить теорию на более широкую сферу применения. Анализируя курс математического анализа, способы его обоснования и проблемные ситуации, можно выявить когнитивную специфику его методологического богатства. Когнитивный компонент математической деятельности, характеризующий степень сформированности познавательных умений, наряду с логическим мышлением содержит знание теоретических методов эвристического подхода. Невозможно сразу приобрести когнитивный навык «научиться учиться» пониманию разделов математического анализа и его обобщений, если нет соответствующего адаптированного и хорошо продуманного методологического материала с примерами и контрпримерами для студентов с разным уровнем подготовки [10]. Заметим, что «умение учиться» – это еще и стремление к самообразованию. Обучение математическому анализу – это какая-то особая интеллектуально-познавательная деятельность, в которой нельзя забывать о том, что прежде чем размышлять «чему учить» и «как учить», надо сначала представить себе «кого учить».

Хорошим полигоном для когнитивных экспериментов при формировании критического мышления является обучение математическому анализу, поскольку с точки зрения развития рефлексивного опыта именно математика является образцом аргументированности, обоснованности и научной строгости. Так, начинать первую лекцию по математическому анализу с аксиоматики действительных чисел, как основного объекта математического анализа, с помощью понятия «сечения» по Дедекинду в области рациональных чисел, может как раз привести к полному непониманию, т.к. в дальнейшем изложении курса объект «сечение», как правило, ни разу не упоминается. При изучении новой темы вполне естественным является «проход через ошибки непонимания», поскольку математические ошибки – это один из способов

рефлексивного способа обучения математическому анализу с использованием эвристических стратегий. Однако к «негативной» специфике эвристического подхода в математике можно отнести то, что она не гарантирует нахождения решения проблемной задачи даже в том случае, если оно реально существует, приводя иногда к ошибочным выводам. Хотя «учебные ошибки» при изучении математики по-своему способствуют прогрессу и их полезно «пережить», т.к. нельзя научить, не допуская ошибок. Но когда в педагогических целях упрощенное доказательство теоремы не сдается «под ключ», то тогда остается уповать на когнитивные стратегии понимания. А если для некоторых студентов сказанное будет все же недостижимо, то тогда это станет неточным предположением из области «ложечки потом нашлись, но осадок остался».

Заключение

К эвристической деятельности, следуя Джорджу Пойа, можно отнести как эвристический опыт решения сложной, комплексной математической задачи, так и специфические приемы эвристического поиска, стимулирующие поиск решения и содержательный анализ новых проблем, использованные в наиболее развитых математических теориях и сознательно перенесенные с одних задач на решение других. Мы рассмотрели несколько разных эвристических приемов, которые могут быть полезными при когнитивном обучении математическому анализу, которые, безусловно, не исчерпывают всех возможных эвристических приемов. Например, в математическом анализе можно указать на разные эвристические приемы решения задачи интегрирования одной и той же элементарной функции. В более сложном теоретическом контексте интегрировать «дельта-функцию», которая позволила эвристически обобщить точечное воздействие, т.е. сосредоточенное в одной точке, или функцию с локализованным на бесконечно малом интервале бесконечно большого значения и с интегралом, равным единице, переходя к задаче обоснования теории обобщенных функций в разделе функционального анализа. Кроме того, эвристический потенциал математической теории категорий, изменившей общепринятые философско-методологические представления об универсальности теории множеств, свидетельствует о том, что современная математика по-прежнему сохраняет высокий уровень абстракций.

Если бы не было дерзновенного человеческого творчества, вызвавшего к интеллектуальной жизни математику, то не было бы и математического анализа, не было бы анализа вообще и не было бы ни одной точной науки. Когда эвристическая активность творческой самостоятельности студентов стимулируется за счет проблемности и новизны математической деятельности, то совет Пойа – «осмотритесь вокруг», с успехом применяемый в математическом анализе, тоже возбуждает интерес к математике. Следует добавить, что смысловой акцент у Пойа делается не только на методах решения задач, но и на методологии изучения формализованного доказательства утверждений математического анализа, в которых эвристические приемы и рассуждения рассматриваются, по сути, как вспомогательные, но содержащие эвристически ценную догадку. Формирование творческой личности осложняется недостаточной разработанностью теории и методики эвристической деятельности обучения математике, поскольку она представляет методологические принципы, а не правила с четкими условиями применения. Высокий уровень формирования эвристической компетентности студентов предполагает интеграцию ее деятельностного, когнитивного и мотивационного компонентов. Уровень владения эвристическими методами математического анализа как системы

методических приемов, стимулирующих интуитивное мышление, характеризуется уровнем развития когнитивно-абстрактного мышления в рефлексивном контексте решения проблемно-ориентированных задач, т.е. во взаимодействии с математическим мышлением. Но чтобы личное математическое открытие состоялось, нужен еще обозримый «горизонт проблемных вопросов», раскрывающих возможные эвристические способы аргументации проблемных математических рассуждений.

Педагогическую эвристику в математическом образовании можно охарактеризовать как продуктивный прием, способный оказать влияние на формирование творческой деятельности студентов при изучении сложных разделов математики. Все это важно для дальнейшей успешной работы, поскольку творческие подходы, включающие эвристические элементы, входят в стиль математического рассуждения. Определения, аксиомы и теоремы, не являясь эвристиками, неявно становятся ими при решении проблемных задач с когнитивными функциями, помогая избежать ошибочных решений. Поэтому эмоциональное отторжение математического анализа, например студентами-нематематиками, вполне преодолимо, но для этого надо еще знать определения с поясняющими примерами и контрпримерами. Нельзя забывать также о том, что рассмотренные выше эвристические способы математического рассуждения – это не методы строгого логического доказательства, претендующего на обоснованность каждого шага математического утверждения, а приемы рационального поиска. У эвристического метода математического познания есть еще один важный методический недостаток – зависимость от уровня обученности и сформированных ранее когнитивно-познавательных умений студентов. В заключение отметим, что основным побудительным мотивом критической рефлексии является сомнение, но, как считал Анри Пуанкаре, «недостаточно еще во всем сомневаться, нужно знать, почему возникает сомнение».

Статья публикуется при финансовой поддержке издательства «Социально-гуманитарное знание» (решение №210553).

Литература

1. Князев Н. А. Актуальные вопросы методологических исследований в области философии образования // *Философия образования.* **2012**. №1. С. 44–53.
2. Пойа Д. Как решать задачу // *Квантор.* **1990**.
3. Султанова Л. Б. Интуиция и эвристика в математике // *Российский гуманитарный журнал.* **2013**. Т. 2. №3. С. 237–251.
4. Калинин С. И. Эвристики в содержании обучения студентов математических специальностей дифференциальному и интегральному исчислению // *Вестник Вятского государственного гуманитарного университета.* **2008**. №2–1. С. 126–134.
5. Босс В. *Лекции по математике: анализ (Краткое и ясное изложение предмета).* М.: Едиториал УРСС, **2004**.
6. Климчук С. Контрпримеры в курсе математического анализа // Иванов О., Климчук С. *Математический анализ для первокурсников.* М.: МЦНМО. **2013**. С. 81–136.
7. Пантаев М. Ю. *Матанализ с человеческим лицом, или как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа.* М.: ЛЕНАРД, **2016**. Т. 1.
8. Липатникова И. Г., Паршина Т. Ю. Эвристическая математическая задача как средство формирования когнитивной компетентности // *Фундаментальные исследования.* **2012**. №9–1. С. 98–102.
9. Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения.* М.: Наука, **1975**.
10. Еровенко В. А. Когнитивная технология «научить учиться» студентов, изучающих высшую математику // *Alma mater (Вестник высшей школы).* **2020**. №1. С. 60–65.

Поступила в редакцию 12.01.2021 г.
После доработки – 17.02.2021 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2021.1.2

Methodological orientation of heuristic strategies in cognitive understanding of mathematical analysis

© V. A. Erovenko

Belarusian State University
4 Nezavisimosti Avenue, 220030 Minsk, Belarus.

Email: erovenko@bsu.by

Philosophical reflection of heuristic techniques and cognition methods reveals the essence of mathematical concepts, designing methods of mathematical objects and enriches ideas about the mathematical world picture. It deepens the subject of his own philosophical and methodological research in the philosophy of mathematical education. Although heuristic ideas have long been used in philosophical studies, the heuristic activity in mathematics is the process of setting a new problem and finding its solution. The article is devoted to philosophical and methodological analysis of mathematic heuristic strategies in the context of cognitive understanding of mathematic philosophy problems and reflexive analysis of problem-oriented topics of mathematical analysis. Heuristic approaches to higher mathematics differ from the methodological techniques of the algorithmic type, focused on formal logical analysis. Heuristic techniques direct thought to a meaningful analysis of mathematical problems, it stimulates intuitive thinking in solving new problems. The article draws particular attention to the problem of the mathematical knowledge substantiating when interpreting mathematical analysis as the most complex part of higher mathematics and in connection with the expansion of the field of its applications. The reflection of heuristic methods in the study of sections and directions of mathematical analysis has methodological significance. It is a search for a new approach to the formalization of cognitive research creative activities. This approach becomes a necessary component of the modern system of university mathematical education at various professionally necessary severity levels.

Keywords: philosophy of mathematics, methodology of mathematics, mathematical analysis, heuristic strategies in mathematics, cognitive difficulties of understanding.

Acknowledgements. The article is published under the financial support of "Sotsial'no-Gumanitarnoe Znanie" Publishing House (Decision No.210553).

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Erovenko V. A. Methodological orientation of heuristic strategies in cognitive understanding of mathematical analysis // *Liberal Arts in Russia.* **2021.** Vol. 10. No. 1. Pp. 18–31.

References

1. Knyazev N. A. *Filosofiya obrazovaniya.* **2012**. No. 1. Pp. 44–53.
2. Polya G. *Kvantor.* **1990**.
3. Sultanova L. B. *Liberal Arts in Russia.* **2013**. Vol. 2. No. 3. Pp. 237–251.
4. Kalinin S. I. *Vestnik Vyat-skogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta.* **2008**. No. 2–1. Pp. 126–134.
5. Boss V. *Lektsii po matematike: analiz (Kratkoe i yasnoe izlozhenie predmeta) [Lectures in mathematics: analysis (concise and clear presentation of the subject)].* Moscow: Editorial URSS, **2004**.
6. Klimchuk S. Ivanov O. *Matematicheskii analiz dlya pervokursnikov.* Moscow: MTsNMO. **2013**. Pp. 81–136.
7. Pantaev M. Yu. *Matanaliz s chelovecheskim litsom, ili kak vyzhit' posle predel'nogo perekhoda: Polnyi kurs matematicheskogo analiza [Calculus with a human face, or How to survive after the passage to the limit: a complete course in mathematical analysis].* Moscow: LENARD, **2016**. Vol. 1.
8. Lipatnikova I. G., Parshina T. Yu. *Fundamental'nye issledovaniya.* **2012**. No. 9–1. Pp. 98–102.
9. Polya G. *Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya [Mathematics and plausible reasoning].* Moscow: Nauka, **1975**.
10. Erovenko V. A. *Alma mater (Vestnik vysshei shkoly).* **2020**. No. 1. Pp. 60–65.

Received 12.01.2021.
Revised 17.02.2021.