DOI: 10.15643/libartrus-2017.1.4

Понятие истинности математической теории в контексте обоснования современной математики

© Н. В. Михайлова

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Беларусь, 220013 г. Минск, улица Петруся Бровки, 6.

Email: michailova_mshrc@mail.ru

Понятие истинности математической теории играет важную методологическую роль в философии математики в контексте связующего звена между онтологическими и гносеологическими аспектами проблемы обоснования математики. В статье анализируется, как особенности математического познания отражаются в понимании концепции истины в современной математике. Утверждается, что понятие истинности предложений и теорем в математике является метаматематическим, поэтому недооценка различия между математикой и метаматематикой может привести к философским недоразумениям. Суть таковых заключается в следующем. В науке был практически репрезентирован теоретически возможный уровень строгости современных математических теорий, но для разрешения принципиальных философско-методологических трудностей проблемы обоснования математики необходима формальная доказуемость в логически непротиворечивой теории. Отмечается также, что вопреки широко распространенному мнению жесткая формализация доказательства все же не является синонимом надежности и строгости математических рассуждений с точки зрения философии обоснования современной математики.

Ключевые слова: *философия математики, проблема истины в математике, непротиворечивость, обоснование математики.*

1. Введение

Как известно, одной из сложнейших проблем теории познания является проблема истины: возможно, это самая сложная философская проблема, поэтому мы сузим рассмотрение этой трудной темы до философского понимания истины в контексте обоснования современной математики, хотя не каждый философ математики будет говорить, например, об «истинной математике» как единственно возможном своде правильных рассуждений и умозаключений. До конца девятнадцатого века мало кто сомневался в истинности математических теорий, однако с возникновением неевклидовых геометрий, наряду с заботой о непротиворечивости выбираемых систем аксиом, снова пришлось возвращаться к проблеме истинности, но уже на более высоком уровне метаматематического обоснования. В рамках фундаменталистского направления в философии математики математическое утверждение «возводится в ранг истины» посредством доказательства, которое рассматривается как необходимый атрибут математического мышления. Это означает, что в фундаментализме истинным является доказанное математическое знание. Вообще, отметим, что «объяснение природы математической истины является центральной темой и в современной философии математики, включающей в себя вопросы эпистемологии и онтологии формальных теорий» [1, с. 5]. Поэтому в философии математики предпринимаются попытки найти соответствующее направление внешнего обоснования математических теорий, которое сводится к ответу на философский вопрос: как можно охарактеризовать математическую истину?

При ответе на данный вопрос следует соблюдать осторожность, т.к. понятие истины с необходимостью предполагает наличие некоторой оценки, основание которой пока не совсем ясно, с точки зрения соотношения веры и знания. Но философов математики интересует не только проблема обоснования математики в плоскости эпистемологии или вопрос о природе математического знания в аспекте онтологии, а, прежде всего, вопрос о том, какую функцию истина выполняет в математическом знании. Вопрос об онтологической истинности математических предложений и теорем зависит от философского взгляда на природу самой математики, а также от интерпретации понятия доказательства и метаматематического понятия непротиворечивости. Поэтому, анализируя развитие философских представлений по проблеме обоснования современной математики, нельзя не связать их с актуальной темой «истины в математике», поскольку особенности математического познания находят свое отражение в понимании возможности убедительного доказательства математических теорем в качестве «эталона истины». Утверждение признается математически истинным, если оно, будучи включенным в определенный методологический контекст математической теории, не приводит к противоречиям, а непротиворечивость конкретной математической теории не идеальная цель, а фактически реализуемое состояние.

Без концепции истины трудно представить себе современную математику. Соответствующие высказывания о математической истине расположились в диапазоне от невозможности дать определенный ответ до безусловной истинности математических теорем. Причина такого разногласия, по мнению математика Ю. И. Янова, состоит в том, что «понятие истинности теорем является метаматематическим, и потому до тех пор, пока соответствующий раздел метаматематики не был формализован и тем самым превращен в часть математики, обсуждение этого вопроса могло носить только философский характер» [2, с. 1]. Заметим, что недооценка различия между математикой и метаматематикой может привести к недоразумениям и противоречивым высказываниям, т.к. предметом математики являются формальные системы, создаваемые математиками, а к предмету метаматематики относится изучение, описание, обсуждение свойств формальных систем, таких как непротиворечивость, полнота, независимость аксиом и других. Заметим, что XX век стал переломным с точки зрения трактовки философско-математических вопросов в математике, поскольку значительная часть метаматематики была «математизирована», и такое понятие как доказательство приобрело вполне определенный формальный смысл, хотя его «неявная опора» на использование классической логики не позволила достичь «полного обоснования» математики. При общем стремлении к объективной истине можно ли ее рассматривать как предельное знание? Вообще говоря, нет, но внутренняя убежденность и вера в истинность знания необходима любому человеку. Согласно этой вере, математика есть подлинное знание, т.к. открывает истину.

2. Вопрос о непротиворечивости математических теорий

Но истинность теоремы – это лишь часть знания, раскрывающегося в ее математическом доказательстве. Даже философское несоответствие естественной и формальной логик отражено в несоответствии между понятием «истинность» и понятием «доказуемость». В идеале истинность математического утверждения устанавливается с помощью доказательства. Следуя принятой математической практике, по-видимому, можно согласиться с заключением профессионального математика Ю. И. Янова, что «мы можем определить понятие истинности предложений в математике как формальную доказуемость в непротиворечивой теории» [2, с. 26]. При этом следует особо подчеркнуть, что речь идет о формальных теориях, т.к. содержательные теории не столь уязвимы с точки зрения противоречивости, поскольку их можно рассматривать не целиком, а в виде фрагмента, локальная непротиворечивость которого обеспечивается в процессе его построения. Таким образом, математическое предложение истинно, если оно формально-логически следует из аксиом непротиворечивой теории, благодаря чему метаматематическое понятие истинности приобретает внутриматематический характер. Отметим, что теоретический вопрос концепта математической истины, в связи с развитием современных компьютерных технологий и вычислений, оказался более философски приземленным и не менее важным вопросом в контексте обоснования современной математики. Что касается масштабных компьютерных вычислений, то эмпирически они могут быть убедительными, но при этом они не всегда избавляют от необходимости рефлексии математических доказательств.

Вопрос о непротиворечивости теории множеств, представлявшийся в начале XX века важнейшей проблемой современной математики, не интерпретируется сейчас как вопрос о непротиворечивости всей математики. Более того, в такой достаточно развитой науке, как современная математика, могут существовать непротиворечивые теории, объединение которых противоречиво. Поэтому, возможно, вопрос о непротиворечивости математики в целом не имеет смысла, т.к., например, аксиоматические теории евклидовой и неевклидовой геометрии, которые непротиворечивы порознь, противоречивы в совокупности. Работающий математик, как правило, не задается вопросом об истинности математических теорий. Кроме того, по мнению Б. Л. Яшина: «Он уверен в том, что, если та или иная теорема (высказывание) математики является следствием некоторой непротиворечивой системы аксиом, то ее (его) необходимо считать истиной. При этом молчаливо полагается, что непротиворечивая система аксиом не может содержать ложных положений, то есть каждая из аксиом является истинным высказыванием» [3, с. 52]. Однако критерий непротиворечивости нельзя считать единственным или определяющим в проверке истинности математической теории, потому что истинность, а также степень надежности аксиом можно установить лишь практикой математического познания и его приложений. В обосновании современной математики исследуется только непротиворечивость отдельных математических теорий, например, формальной теории множеств в рамках формалистского направления обоснования. Поэтому можно сказать, что непротиворечивость математической теории является для утверждения истинности ее предложений необходимым, но, вообще говоря, не достаточным условием.

Сложившуюся традицию можно обозначить как «релятивизм», в рамках которой вместо поиска математической истины математики занялись поисками логической непротиворечивости с учетом специфики ее зависимости от того, что именно положено в основу математических рассуждений. В частности, «не релятивизированное» понятие истины в математике может быть востребовано, когда истина одинаково представлена во всех математических структурах. Можно даже предположить, что «центральное ядро» любой признанной математической теории непротиворечиво, например, непротиворечивость таких теорий, как элементарная геометрия, арифметика, анализ, хорошо изучена и достаточно надежно обоснована.

Действительно, после доказательства непротиворечивости арифметики, хотя и более сильными средствами, чем финитные, практически снизился методологический интерес к доказательству непротиворечивости других формальных теорий. Однако по-прежнему остается проблематичной непротиворечивость такой мощной аксиоматической теории, как система Цермело-Френкеля. История и генезис развития современной математики показывают, что в ней столь же трудно ожидать противоречий, как и в арифметике, понятия которой существенно использовались при построении интерпретаций для доказательства непротиворечивости других математических теорий. Тем не менее можно предположить относительность истины, которая отражает объект познания не полностью, а в некоторых обусловленных пределах. В таком философском контексте математическая истина может оказаться относительной, т.к. в математике логически выведенные истины ограничиваются рамками начальных условий задачи или набором исходных аксиом, а с точки зрения проблемы обоснования, нельзя настаивать на безупречности проведенного рассуждения о непротиворечивости аксиоматизированных математических теорий.

В действительности следует признать, что непротиворечивость математической теории остается пока главным критерием ее истинности, хотя трактовка критерия истинности в математике становится уже другой, поскольку вместо попыток формального доказательства непротиворечивости математической теории выдвигается более умеренное требование наличия косвенных доводов, подтверждающих непротиворечивость теории. Ведь до сих пор нет четких философских критериев, позволяющих отделить истину от заблуждения, и, как отмечает А. Л. Никифоров, «...важно и нужно исследовать разнообразные факторы, релятивизирующие результаты познавательной деятельности, уточнять понятия субъекта, объекта и предмета познания, но, как мне представляется, все такого рода исследования сохраняют смысл лишь до тех пор, пока мы – явно или неявно – сохраняем классическую идею истины» [4, с. 52]. Что касается философского понимания истины в математике, то, с одной стороны, онтологическая истинность математических понятий и принципов должна быть гарантией их непротиворечивости по отношению друг к другу, а с другой – трудности обоснования непротиворечивости аксиоматической системы, формируемой без ссылок на очевидность, приводят к тому, что она не может быть принята в качестве онтологически истинной и доступной интуиции. Это связано еще и с тем, что непротиворечивость необходима, но все же недостаточна для подтверждения истинности математических утверждений, т.к. логика редуцирует математическую теорию к аксиомам, хотя при этом ничего не говорит об истинности последних.

3. Концепция истины в современной математике

Понятие соответствия математической мысли исследуемому объекту является чрезвычайно расплывчатым, поэтому его можно уточнять и философски конкретизировать по-разному. Но математики верят в то, что истинное знание дает им адекватную картину окружающего мира. В частности, для понимания других косвенных доводов, подтверждающих непротиворечивость теории, также необходимо понять, откуда у математиков возникает вера, или философская идея, в существование математической истины. Ведь математическое творчество, стремящееся к обретению математической истины, опирается не только на веру, но еще и на математическое знание. «Более того, – как утверждает активно работающий математик Ю. И. Манин, – процесс открытия истины может включать в себя и обычно включает экспериментирование (в наши дни – обширное и использующее компьютеры), ошибочные идеи, неожиданные озарения и все прочее, благодаря чему математическое творчество столь привлекательно для тех, кто им занимается» [5, с. 99]. Для экспликации соответствующих путей познания математической истины в контексте философии математики надо рассмотреть основные направления обоснования современной математики как функционирующую систему. Следует также подчеркнуть, что различные истины интуиционистского и формалистского направлений в обосновании математики, сближающиеся в финитных рассуждениях, хотя и не являются совместимыми, тем не менее могут быть интерпретированы как связанные философско-методологическим принципом отношения дополнительности.

Выявляя наиболее существенные черты рабочих направлений обоснования современной математики, вообще говоря, нет необходимости сосредотачиваться только на одном каком-то направлении, например, интуиционизма или формализма, отказываясь тем самым от других способов и методов доказательства в математике. Напомним, что обоснование математических доказательств с самого начала возникло на стыке двух гносеологически противостоящих концепций интуиционизма и формализма, каждая из которых пользовалась своей логикой, в связи с их методологическим подходом к проблеме выбора логических средств, допустимых в математических рассуждениях. Могло так оказаться, что высказывание, истинное в рамках разных логических систем, и доказывается в них по-разному. По этому поводу философ математики В. Я. Перминов отметил: «Система любых истин совместна, и несовместимость описания говорит о его ложности в некоторых моментах. Таково общее отношение истинности и логической непротиворечивости, вытекающее из статуса логики. В эмпирических науках мы не можем непосредственно переходить от истинности суждений к их непротиворечивости по той причине, что истинность системы эмпирических утверждений всегда проблематична» [6, с. 162]. Даже если математическая теория не формализована, она все же ограничивает средства, допустимые для решения своих проблем, хотя математические структуры имеют определенную произвольность. Возможно, ошибка классических программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему достоверных положений обоснования, не учитывая их дополнительный характер взаимодействия, т.е. в них не выдерживался принцип «логического консенсуса», одинаково приемлемый и для формалиста, и для интуициониста.

Поэтому философская концепция истины не должна оценивать достоинства различных направлений обоснования математики, т.к. математическая истина не рассматривается как нечто законченное и навсегда незыблемое. Даже ограничения формализма, установленные теоремами Геделя, не поколебали общего убеждения современных математиков в его целесообразности, а возникающие при их разрешении трудности давали дальнейшие мощные импульсы к развитию математики на современном этапе. Если оценивать концепцию истины, то можно заключить, что ее не следует связывать исключительно с формалистским направлением. Это можно аргументировать отсутствием общепринятого представления о том, что такое знание, и чем же оно отличается от веры. Еще важно исследовать разнообразные философско-методологические факторы, релятивизирующие результаты познавательной математической и интеллектуальной деятельности, т.к. в методологии обоснования современной математики отражаются все тенденции, свойственные философии и связанные с философской проблемой истины. Фактически она сводится к главному онтологическому вопросу о существовании математических объектов, в котором переплетаются различные философские проблемы, в частности, касающиеся понятия математической истины.

4. Заключение

Понятие истины играет важную методологическую роль в философии математики еще и в качестве связующего звена между онтологическими и гносеологическими аспектами проблемы обоснования математики. Проблема обоснования современной математики толкуется в неклассической и постнеклассической науке не как проблема абсолютного обоснования, а как экспликация систематизации всех направлений развития математики. Кроме того, с точки зрения обоснования математики, проблема истины в математике заключается в том, что, даже при точном определении языка математики, математические предложения, которые являются истинными либо ложными, или во всяком случае осмысленными в одном языке, могут быть бессмысленными выражениями в другом, например, естественном языке. В связи с неоднозначностью философского понимания истины в современной математике следует обратить внимание на то, что современная математика вовсе не настаивает на том, что некоторое ее утверждение непременно истинно, а считает, что если принять ряд предположений, то данное утверждение является их логическим следствием. В результате философского осмысления сложной проблемы обоснования современной математики, даже несмотря на то, что математические теории исходят из истинных оснований и законов дедукции, математика остается самой сложной для понимания наукой.

Философ математики Л. Б. Султанова с позиции неявного знания обозначила проблему границ познания: «Выяснилось, что и математический разум, и научное познание вообще имеют свои пределы, и что центральным вопросом не только философии математики, но и философии науки, а также теории познания должен стать вопрос о границах познания, причем познания не только математического, но и научного» [7, с. 235]. Заметим, что в отличие от метаматематики философия математики в качестве неотъемлемой нефундаменталистской составляющей включает в себя существующую социокультурную реальность. Поэтому вопрос о понимании истины в математических теориях оказался в связи с развитием компьютерных вычислений практически приземленным, хотя методологически не менее важным вопросом, с точки зрения обоснования современных математических теорий. Ни одно философское направление не может вызвать сочувствие у работающего математика, если оно не признает объективного существования математической истины. В частности, используя локальную непротиворечивость и философский концепт истины, можно попытаться на основе философского принципа рефлексии сделать доступными ценности разных методологических подходов к обоснованию математики, позволяющие получить новые математические выражения, не выводимые из исходной системы аксиом и правил вывода. Из практического применения теоретической математики иногда делается вывод о том, что математическая теория в своей истинности проверяется или обосновывается практикой. Такой вывод получается при смешении таких понятий, как истинность и содержательность. Можно утверждать, что развитие содержательной математической теории стимулируется практикой, что она в этом случае отражает реальность и она тогда содержательна, в смысле соответствия системе реальных связей. Но отсюда не следует, что она истинна и подобно эмпирическим теориям обосновывается ее использованием.

В довольно широкой философской перспективе не следует также связывать математическую истину, ограниченную математическим доказательством и реализуемую поэтапно в генезисе математического познания, исключительно с направлением формализма Гильберта в обосновании математики. Классическая теория истины как соответствия знания реальности называется корреспондентной, но наряду с этой теорией истины в философии науки можно еще выделить когерентную теорию, суть которой состоит в том, что истинными в ней считаются любые внутренне непротиворечивые и согласованные высказывания. Ее определенным философским недостатком является то, что указанные высказывания могут быть произвольными. Среди других теорий истины определенным влиянием пользуется прагматическая концепция истины, согласно которой истина выступает как практическая полезность и эффективность знания, которые имеют непосредственное отношение к современной математике. Механизмы признания истинности научного знания, вообще говоря, не ограничиваются совокупностью одних только логико-эпистемологических процедур, а в общефилософском контексте с учетом реальной математической практики, в случае невозможности доказательства непротиворечивости математической теории, следует также признать допустимость социокультурного критерия практической полезности.

Литература

1. Хлебалин А. В. Понятие истины в математической теории // *Сибирский философский журнал*. **2016.** Т. 14. №2. С. 5–12.
2. Янов Ю. И. *Математика, метаматематика и истина.* М.: ИПМ им. М. В. Келдыша. Препринт №77, **2006.** 32 с.
3. Яшин Б. Л. Проблема истины в математике // *Математика в контексте философских проблем.* М.: МГПИ, **2012.** С. 49–55.
4. Никифоров А. Л. Понятие истины в теории познания // *Эпистемология и философия науки.* **2008.** Т. XVI. №2. С. 50–65.
5. Манин Ю. И. Истина как ценность и долг: чему нас учит математика // *Математика как метафора. Электронное издание.* М.: МЦНМО, **2014.** С. 93–105.
6. Перминов В. Я. *Философия и основания математики.* М.: Прогресс-Традиция, **2001.** 320 с.
7. Султанова Л. Б. *Неявное знание в развитии математики: монография.* Уфа: РИЦ БашГУ, **2009.** 260 с.

Поступила в редакцию 22.01.2017 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2017.1.4

The concept of truth of the mathematical theory in the context of contemporary mathematics substantiation

© N. V. Mikhailova

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
6 Petrus Browka Street, 220013 Minsk, Belarus.

Email: michailova_mshrc@mail.ru

The concept of truth of the mathematical theory plays an important methodological role in philosophy of mathematics in the context of a link between ontological and gnoseological aspects of a problem of mathematics substantiation. In the article, the author analyzes how the features of mathematical knowledge are reflected in the understanding of concept of truth in the contemporary mathematics. The author claims that the concept of truth of mathematical offers and theorems is metamathematical concept; therefore, underestimation of distinction between mathematics and metamathematics can lead to philosophical misunderstanding. They consist primarily in the fact that theoretically possible level of rigor of contemporary mathematical theories has been virtually represented in the science. In order to resolve the fundamental philosophical and methodological difficulties of the problem of mathematics substantiation, the formal provability in logically consistent theory is necessary. However, contrary to the widespread belief, a rigid formalization of the proof is still not the synonymous with reliability and rigor of mathematical reasoning from the standpoint of the philosophy of contemporary mathematics substantiation.

Keywords: philosophy of mathematics, problem of truth in mathematics, consistency, substantiation of mathematics.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Mikhailova N. V. The concept of truth of the mathematical theoryin the context of contemporary mathematics substantiation // *Liberal Arts in Russia.* **2017.** Vol. 6. No. 1. Pp. 40–47.

References

1. Hlebalin A. V. *Sibirskij filosofskij zhurnal.* **2016.** Vol. 14. No. 2. Pp. 5–12.
2. Janov Ju. I. *Matematika, metamatematika i istina [Mathematics, metamathematics and the truth].* Moscow: KIAM. Preprint no 77, **2006**.
3. Jashin B. L. *Matematika v kontekste filosofskih problem [Mathematics in the context of philosophical problems].* Moscow: MSPI, **2012**. Pp. 49–55.
4. Nikiforov A. L. *Jepistemologija i filosofija nauki.* **2008**. Vol. XVI. No. 2. Pp. 50–65.
5. Manin Ju. I. *Matematika kak metafora. Jelektronnoe izdanie [Mathematics as metaphor. Electronic edition].* Moscow: MCCME, **2014**. Pp. 93–105.
6. Perminov V. Ja. *Filosofija i osnovanija matematiki [Philosophy and foundations of mathematics]*. Moscow: Progress-Tradition, **2001**.
7. Sultanova L. B. *Nejavnoe znanie v razvitii matematiki: monografija [Implicit knowledge in the development of mathematics: a monograph].* Ufa: RIC BashGU, **2009**.

Received 22.01.2017.