DOI: 10.15643/libartrus-2017.1.3

Понимание в математике

© Л. Б. Султанова

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450074 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

Email: sultanova2002@yandex.ru

В данной статье исследуется феномен понимания в математике. Эта тема актуальна именно в современной философии науки, в которой классическая дихотомия «понимание-объяснение», характерная для классического естествознания, подвергается серьезным трансформациям. Одной из причин этих трансформаций является существенный прирост потока информации в современном естествознании. Понятно, что при таком положении дел требуется провести серьезное осмысление этой информации в контексте современной научной картины мира. Поскольку современное естествознание неразрывно связано с математической наукой, при этом необходимо опираться на результаты исследований феномена понимания в математике. Такие исследования уже ведутся в современной философско-научной литературе, хотя эта тема пока еще является относительно новой. Автор выделяет важнейшие, на его взгляд, типы понимания в математике, учитывая при этом ситуацию обучения математике, ситуацию математического открытия, а также «математическую символизацию». Исследование основных типов понимания в математике, а также выявление его специфики было бы невозможно без опоры на понятие неявного знания, взятого в качестве методологического инструмента, и привлечения ранее опубликованных работ автора. В своих исследованиях автор опирается на классические работы по философии математики (Ж. Адамар, Г. Вейль, А. Гейтинг), а также труды известных современных отечественных и зарубежных ученых и философов (С. С. Гусев, Д. Дойч, Г. Лолли, Г. Л. Тульчинский). Результаты исследований автор обобщает в виде выводов заключения.

Ключевые слова: *гуманитарное познание, естественно-научное познание, философия науки, субъект познания, понимание математических терминов и символов, триада неявного знания, озарение, вербализация и экспликация неявных элементов, дедуктивная математика, программы обоснования математики.*

Как известно, в научном познании имеют место две базовые гносеологические процедуры: объяснение и понимание. Традиционно, еще со времен неокантианства, понимание связывалось с гуманитарным познанием, а объяснение – с естественно-научным познанием. Однако во второй половине прошлого столетия, в связи с возникновением в рамках постнеклассической научной картины мира, общенаучной парадигмальной тенденции к сближению гуманитарного и естественно-научного знания, это жесткое разделение начинает постепенно ослабевать, что в итоге разрушает классическую дихотомию объяснения и понимания как несовместимых гносеологических процедур. Современная наука признает, что объяснение и понимание взаимосвязаны, и что «...понимание – это одна из высших функций человеческого мозга и разума, и эта функция уникальна. ...Каждое открытие нового объяснения и каждое понимание существующего объяснения зависит от уникальной человеческой способности мыслить творчески» [1, с. 17]. А в научном познании «способность предсказывать или описывать что-либо, даже достаточно точно, совсем не равноценна пониманию этого» [1, с. 9], поэтому попперовская оценка наилучшей научной теории как обладающей наибольшей прогностической силой требует дополнения, поскольку результаты научного прогнозирования нуждаются в соответствующем осмыслении в рамках актуального научного контекста. По этой причине современная философия науки все больше внимания уделяет исследованию роли и специфики понимания в естествознании. Кроме того, следует учитывать, что без понимания фундаментальных принципов научного познания и того, каким образом эти принципы соотносятся с результатами актуальных научных исследований, невозможна разработка приложений науки и практическое применение ее результатов.

Понимание в общегносеологическом смысле нередко рассматривают как «субъективную, индивидуальную способность личности к овладению какими-либо знаниями или навыками, а также сам процесс и результат реализации этой познавательной способности» [2, с. 6]. Можно сказать, что понимание в общенаучном отношении формируется на основе осмысления наличного научного знания в рамках общего научно-теоретического контекста, определяемого соответствующей научной картиной мира.

Результатом понимания на уровне конкретного субъекта познания является осмысление наличного научного знания, продвижение в познании научных проблем в рамках имеющейся научной картины мира, а также обретение способности к генерированию нового знания. Рост потока информации и в естественно-научном познании требует оперативного осмысления этой информации в рамках современной научной картины мира, поэтому вопрос о понимании в естественных науках приобретает возрастающую актуальность, что в итоге обусловливает необходимость философско-методологических исследований такого плана. Это означает, что вопрос о специфике понимания в естественно-научном познании вполне корректно может быть поставлен в рамках философии науки, причем и в аспекте математического познания. Но прежде выясним, каким образом связаны между собой объяснение и понимание на примере математики. Дело в том, что математика не является естественной наукой, и поэтому для нее некорректна классическая дихотомия понимания и объяснения. Еще Г. Вейль отмечал, что «...ныне вновь предпринимаются попытки противопоставить понимание ...естественно-научному объяснению...» [3, с. 25], при этом акцентируя внимание на том, что «в математике мы предпочитаем несколько более трезво смотреть на вещи» [3, с. 25]. Это означает, что, по Г. Вейлю, в математике дихотомия понимания и объяснения невозможна. А с точки зрения современной философии математики, «правильным подходом... является «не сейчас я вам объясню», а «что мы поняли»» [4, с. 279].

Думается, что действительно, сложно разобраться в том, что же собой представляет математическое познание только на основе такой гносеологической процедуры, как объяснение – хотя традиционно в соответствии с классическим подходом именно объяснение играет ведущую роль в математическом естествознании. А вследствие особого места математики в системе наук именно как «языка науки» существенное значение для развития математики имеет также и понимание.

В самом деле, все мы прекрасно помним, что даже в школьной математике любое объяснение неизбежно влечет традиционный вопрос преподавателя: «Это понятно?». И ясно, почему – объяснение в математике существует не само по себе, а ради понимания! Причем объяснение реализуется преподавателем, учителем, который знает свой предмет и вполне разбирается в том конкретном материале, который объясняет. Результатом этого объяснения должно стать понимание как особое состояние мышления того, кому объясняют. Верификацией этого понимания является расширение возможностей математической практики того, кому объясняют, то есть того, кто стремится к пониманию. Можно утверждать, что эта гносеологическая ситуация близка всем, кто обучался математике в школе. Но очевидно, что только этой конкретной гносеологической ситуацией понимание в математике отнюдь не ограничивается: если бы этого было достаточно, то, наверное, никаких бы особых вопросов по взаимосвязи понимания и объяснения в естественных науках и математике не возникало. В самом деле, понимание в математике имеет особую уникальную специфику, требующую специального исследования, поскольку, кроме рассмотренной выше гносеологической ситуации обучения, понимание в математике связано с гносеологическими ситуациями, возникающими в процессе математического познания.

Одна из этих гносеологических ситуаций в математике предполагает понимание математических терминов и символов, которое реализуется в процессе их «непосредственного созерцания». Фактически здесь речь идет о процедуре математической символизации, суть которой адекватно описывается так называемой «триадой неявного знания», применительно к математике означающей буквально следующее: математик А делает математический термин или абстракцию В обозначением объекта С [5, с. 242]. Таким образом, достигается понимание в данной гносеологической ситуации математического познания. Можно принять, что, по Канту, в геометрии процесс математической символизации включает в себя конструктивный момент, когда математический объект, к которому относится конкретное понятие, мысленно «конструируется», т.е. мысленно «выстраивается» субъектом, или, если, хотя бы в свернутом виде, схематично, задаются шаги такого «выстраивания». Именно в этом смысле рассматривал понимание в математике и А. Гейтинг, один из основателей математического интуиционизма.

И последняя, третья, гносеологическая ситуация понимания в математике может быть связана с математическим открытием, когда усилия математика по поиску догадки, которая может быть положена в основу новой математической теории, вдруг увенчались успехом. По существу, эта гносеологическая ситуация качественно отличается от двух предыдущих и наиболее адекватно может быть охарактеризована как проявление математического творчества. В этой гносеологической ситуации понимание того, каким же образом решается поставленная конкретная математическая проблема или задача, достигается в результате «инсайта», т.е. в процессе творческого поиска в математике, а именно – в момент «озарения». Это зафиксировано еще Ж. Адамаром в его алгоритме процесса математического открытия, в котором он выделил ряд конкретных этапов [6]. Гносеологический механизм «озарения» в математике связан с неявным знанием и деятельностью интуиции как движущей силы математического творчества. Математические инновации, развиваемые на базе догадки, обеспечивают понимание того, каким же конкретно образом возможно разрешение стоящих перед математической наукой тех или иных актуальных проблем. Это именно такая гносеологическая ситуация, когда понимание в математике достигается на основе озарения («инсайта»), когда отсутствует (полностью или частично) рациональное осознание этого понимания. Обобщая эту специфику понимания для всего естествознания (через математическое естествознание), мы подтверждаем тезис о том, что «...мы можем понять больше, чем мы непосредственно осознаем, чем поняли» [1, с. 18]. Собственно для решения этих конкретных проблем соответствующие конкретные математические инновации и разрабатываются.

Итак, понимание в математическом познании, несомненно, имеет место. В процессе обучения математике понимать необходимо само конкретное математическое знание (основания и базовые принципы организации математического знания, формулы, символы, определения), т.е. математические символы и условия поставленной задачи, а также стандартные алгоритмы решения этих задач. Далее, при решении нестандартных математических задач или проблем, актуальных для математики в данный исторический период, на основе математических инноваций необходимо достигать понимания того, каким же образом данная задача или проблема в итоге может быть решена – фактически при этом идет речь о математических инновациях.

Это, в принципе, две различные гносеологические ситуации. Но обе эти ситуации вполне естественны и неизбежны для любого субъекта математического познания, и с ними традиционно связывается и само понятие «понимание», обозначающее в контексте философии науки конкретную гносеологическую процедуру. Гносеологическая ситуация, связанная с процессом обучения математике, предполагает понимание математических формул и алгоритмов в целях их практического применения. Вторая связана с дальнейшим развитием математической науки. Необходимо учитывать, что гносеологическая «цена» такого понимания в математике очень высока, поскольку именно такое понимание в математике всегда достигается за счет рационализации элементов неявно-интуитивного уровня математического познания. Это объясняется тем, что «...простые основные принципы лежат глубоко и едва различимы под оболочкой технических деталей» [3, с. 24]. Это означает, что для понимания в математике необходимы очень серьезные когнитивные усилия субъекта познания, связанные с постижением этих «простых», но вместе с тем «глубинных», иначе говоря, имплицитных принципов. Очевидно, что такие задачи математического познания не решаются на основе привлечения только формально-логических средств и не поддаются алгоритмизации: необходимо «подключение» рациональной интуиции как движущей силы научного познания. Серьезная проблема при этом заключается в том, что, поскольку такая рационализация невозможна с помощью формально-логических средств, то относительно конкретных научных теорий такая рационализация не может быть прогнозируема.

Конкретно, эта гносеологическая ситуация, возникающая в математическом познании, предполагающая рационализацию имплицитных элементов, включает в себя следующие пункты: 1) осознание наличия конкретных неявных элементов математического знания (например, неявных лемм); 2) теоретическую вербализацию этих неявных элементов в контексте математического знания; 3) доказательство неявных лемм; 4) «встраивание» этих эксплицированных неявных элементов в общий контекст наличного математического знания. Пункты 1 и 2 могут быть объединены на основе термина «экспликация»: в этом случае говорят, что осуществляется экспликация неявных элементов математического знания. Необходимо учитывать, что в реальном процессе математического открытия, т.е. порождения математических инноваций с их последующим обоснованием и встраиванием в общематематический контекст, рационализация элементов неявного знания с выполнением всех указанных пунктов требуется только после упомянутого встраивания. Поэтому рационализация обычно существенно отстоит по времени от математического открытия и, как уже здесь отмечалось, в конкретных ситуациях в математике является проблематичной. Проблема здесь обусловлена прежде всего нерациональным характером шагов 1 и 2: не существует универсального алгоритма по обнаружению неявных элементов в математических доказательствах и скрытых лемм в формулировках теорем.

В заключение коснемся еще одного типа понимания в математике, связанного с представлением о математике как о единой науке, в которую, тем не менее, объединены многие разделы со своей аксиоматикой и своими базовыми принципами. Г. Вейль выделяет в этом плане два типа понимания – как в топологии и как в алгебре: понятно, что в топологии имеет место наглядность, что упрощает открытия, но в алгебре больше возможностей для строгого обоснования [3, с. 24–41]. Каждый тип понимания оперирует своими базовыми принципами и своими методами. Разумеется, эту специфику единой науки – математики – невозможно игнорировать, если мы действительно хотим достичь такого уровня понимания, который в самом деле позволяет двигаться вперед и открывает новые горизонты математического познания.

Следующая гносеологическая ситуация связана с программами обоснования математики, выдвинутыми в первой четверти прошлого столетия. Дело в том, что каждая такая программа базируется на своем, конкретном представлении о математике как о науке. Например, А. Гейтинг, один из крупнейших представителей математического интуиционизма, считал, что математику необходимо понимать как совокупность «интуитивно убедительных» умственных построений [7]. Другие программы обоснования математики разрабатывались на основе иных представлений о математике, в рамках которых достигалось понимание оснований, задач и методов математики. Фактически это означает, что можно говорить о «разных математиках», хотя такая постановка вопроса представляется несколько искусственной, но, в принципе, она вполне логична и имеет право на существование. Тем более что эти «разные математики» позволяют лучше понимать, каким образом связана с реальностью «традиционная», т.е. дедуктивная, математика. Ведь все парадоксы, обнаруженные, например, в теории множеств, а также в программах логицизма и формализма, обусловлены тем, что дедуктивная математика может квалифицироваться только как формальная онтология, между которой и онтологией неформальной, т.е. философской, имеется некое несовпадение, «зазор». А если бы этого «зазора» не существовало, то «...это устранило бы необходимость понимания...» [1, с. 238], т.е. понимания математических теорий, идей, символов и т.д. самим математиком! И вот тогда, возможно, естественно-научное познание не нуждалось бы ни в каком понимании...

Однако на сегодняшний день мы все же предпочитаем говорить о понимании в математике с учетом ее традиционных, исторически сложившихся оснований и принципов, в рамках ее также исторически сложившегося дедуктивного статуса. И в этом контексте высший возможный уровень понимания в математике достигается именно в результате рационализации и дальнейшей экспликации ее неявных элементов.

Заключение

1. В современной науке отсутствует классическая дихотомия таких фундаментальных гносеологических процедур, как объяснение и понимание – как в гуманитарном, так и в естественно-научном познании. В математике понимание не менее значимо, чем объяснение. Результатом объяснения является достижение субъектом понимания положений математической науки как возможности их осмысления и практического применения.
2. В математике имеют место следующие типы (гносеологические ситуации) понимания:

- понимание того, каким образом могут быть применены формальные алгоритмы математики при решении задач;
- понимание, достигаемое в процессе математической символизации;
- понимание того, каким же образом решаются те или иные нестандартные задачи или актуальные проблемы, достигающееся на основе «озарения».

3. Гносеологическая «цена» понимания в математике очень высока, поскольку понимание математических теорий и доказательств, в конечном счете, достигается за счет рационализации элементов неявно-интуитивного уровня математического познания, что невозможно осуществить только на основе привлечения формально-логических средств математической науки – необходимо «подключение» рациональной интуиции, привлекающей в процессе ее спонтанной деятельности не только теоретически явные, но и неявно-интуитивные элементы.
4. Суть этой рационализации состоит в вербализации с последующей экспликацией имплицитных элементов математического знания и их последующем встраивании в актуальный общематематический контекст. В ситуации математического открытия экспликация математических доказательств обычно исторически отстоит по времени от ситуации порождения инноваций и в целом является проблематичной вследствие непрогнозируемости осознания наличия имплицитных элементов как «скрытых лемм» в доказательстве.
5. Все программы обоснования математики (логицизм, формализм, интуиционизм, конструктивизм), стремясь к преодолению парадоксов канторовской теории множеств, вырабатывали свои конкретные представления о статусе математической науки, на основе которых и достигалось понимание этого статуса в рамках именно этих конкретных программ обоснования. В результате были выстроены различные модели математики. Поэтому конкретные результаты понимания того, на каких конкретно гносеологических принципах строится математика и что она собой представляет, во всех таких конкретных «математиках» различны, что отражено в обзорной литературе по философии математики [4, с. 97–276].

Литература

1. Дойч Д. *Структура реальности.* Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, **2001**.
2. Гусев С. С., Тульчинский Г. Л. *Проблема понимания в философии: философско-гносеологический анализ.* М.: Политиздат, **1985**. 192 с.
3. Вейль Г. Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания в математике // *Математическое мышление.* М.: Наука. С. 24–41.
4. Лолли Г. *Философия математики: наследие двадцатого столетия.* Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, **2012**.
5. Султанова Л. Б. Математическая символизация: специфика и условия реализации // *Российский гуманитарный журнал.* **2014**. №4. С. 237–245.
6. Адамар Ж. *Исследование психологии процесса изобретения в области математики.* М.: Советское радио, **1970**. 152 с.
7. Гейтинг А. *Интуиционизм.* М.: Либроком, **2010**. 160 с.

Поступила в редакцию 15.02.2017 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2017.1.3

Understanding in mathematical science

© L. B. Sultanova

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: sultanova2002@yandex.ru

In the article, the phenomenon of understanding in mathematics is studied. This topic is relevant in contemporary philosophy of science, in which the classic dichotomy of "understanding-explanation", characteristic of classical science, undergoes serious transformations. One reason for this transformation is a quantitative increase in the flow of information in modern science. It is clear that in such a situation you want to hold a serious understanding of this information in the context of modern scientific picture of the world. As the modern science is inextricably linked to mathematical science, it is required to rely on the results of studies of the phenomenon of understanding in mathematics. Such studies are already under way in the modern philosophical and scientific literature, although this issue is still relatively new. The author identifies the most important, in his view, types of understanding in math, taking into account the situation of the teaching of mathematics, the situation of mathematical discovery, and "mathematical symbolism". A study of the main types of understanding in math and the identification of its specificity would have been impossible without the support of the concept of tacit knowledge taken as a methodological tool and author's previously published works taken as a basis. In this article, the author relies on the classic work on the philosophy of mathematics (J. Hadamard, H. Weyl, A. Heyting), as well as the works of famous contemporary Russian and foreign scientists and philosophers (S. Gusev, D. Deutsch, G. Lolli, Tul'chinsky GL). The results of the study are summarized in the form of conclusions.

Keywords: humanitarian cognition, knowledge of natural science, philosophy of science, subject of knowledge, understanding of mathematical terms and symbols, triad implicit knowledge, illumination, verbalization and explication of implicit elements, deductive mathematics, programs of mathematics justification.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Sultanova L. B. Understanding in mathematical science // *Liberal Arts in Russia.* **2017.** Vol. 6. No. 1. Pp. 33–39.

References

1. Doich D. *Struktura real'nosti [The structure of reality].* Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, **2001**.
2. Gusev S. S., Tul'chinskii G. L. *Problema ponimaniya v filosofii: filosofsko-gnoseologicheskii analiz [The problem of understanding in philosophy: philosophical-epistemological analysis].* Moscow: Politizdat, **1985**.
3. Veil' G. *Matematicheskoe myshlenie.* Moscow: Nauka. Pp. 24–41.
4. Lolli G. *Filosofiya matematiki: nasledie dvadtsatogo stoletiya [Philosophy of mathematics: the legacy of the twentieth century].* N. Novgorod: Izd-vo Nizhegorodskogo gosuniversiteta im. N. I. Lobachevskogo, **2012**.
5. Sultanova L. B. *Liberal Arts in Russia.* **2014**. No. 4. Pp. 237–245.
6. Adamar Zh. *Issledovanie psikhologii protsessa izobreteniya v oblasti matematiki.* Moscow: Sovet-skoe radio, **1970**.
7. Geiting A. *Intuitsionizm [The intuitionism].* Moscow: Librokom, **2010**.

Received 15.02.2017.