DOI: 10.15643/libartrus-2016.1.2

Природа топологической интуиции

© Л. Б. Султанова

Башкирский государственный университет
Россия, 450074 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Email: sultanova2002@yandex.ru

Статья посвящена исследованию природы топологической интуиции и раскрытию специфики топологической эвристики в рамках философской теории познания. Автор обосновывает вывод о том, что топологическая интуиция существенно специфична по сравнению с традиционной математической интуицией евклидовой геометрии. Сегодня топология представляет собой динамично развивающуюся область современной математики, прекрасно интегрирующуюся с другими разделами математической науки. В самом общем виде топологию можно определить как раздел математики, изучающий свойства пространственных фигур, не меняющиеся при деформациях. Топологическая интуиция представляет собой инструмент развития топологии на основе топологической эвристики, которая является результатом применения топологической интуиции к объектам топологии. Автор подробно, на примерах, демонстрирует специфику топологической эвристики и устанавливает ее взаимосвязи с эвклидовой геометрией. В итоге автор приходит к выводу о фундаментальности топологической интуиции, и о том, что таковая, возможно, является первичной по отношении к традиционно понимаемой математической интуиции.

Ключевые слова: *топологические исследования в математике, математическая эвристика, топологическая эвристика, topological heuristics, эвристические преобразования в топологии, элементарная геометрия, первоначальные интуиции, унивалентные основания математики, неявные элементы знания, математический априоризм.*

Как известно, интуиция – одна из опорных категорий теории познания, движущая сила научного поиска. По Декарту, интуиция – «естественный свет разума», и, как таковая, носит рациональный характер. С помощью интуиции, на основе так называемого «озарения», в отсутствии достаточных явно предъявляемых оснований, субъект способен на вербальном уровне сформировать догадку, которая в итоге может стать основой для нового научного метода или новой научной теории. Велико значение математической интуиции для решения нестандартных задач, для которых отсутствует алгоритм такого решения. В таких случаях математик обращается к так называемой эвристике, строящейся на основе догадки, полученной посредством интуиции.

Топология – одна из интереснейших областей математики, значительность которой становится все более очевидной буквально с каждым десятилетием. Как известно, в самом общем виде топологию можно определить как раздел математики, изучающий свойства пространственных фигур, не меняющиеся при деформациях. Можно сказать, что топология – раздел математики, изучающий в самом общем виде явление непрерывности. Как известно, зачинателями топологических исследований в математике были такие выдающиеся математики как Л. Эйлер, К. Жордан, Г. Кантор, А. Пуанкаре. Известный немецкий математик второй половины двадцатого столетия Г. Вейль считал, что «Два разных способа понимания стали в наши дни особенно всепроникающими и плодотворными – это топология и абстрактная алгебра» [1, с. 26]. Действительно, в прошлом столетии сформировались и сегодня успешно развиваются такие математические дисциплины как общая топология, алгебраическая топология, дифференциальная топология. В последние десятилетия на основе идей топологии сформировались перспективные направления математики – такие, как топология компьютерных сетей и теория гомотопий, успешно развивающиеся в наши дни.

Поскольку топология – раздел математики, в ней огромное значение имеют так называемые эвристические методы, позволяющие решать сложные, нестандартные задачи, и научные «головоломки», для которых не существует уже известных алгоритмов, и решение которых невозможно без научных инноваций. Совокупность всех эвристических методов математики можно квалифицировать как математическую эвристику, которую образует совокупность нестандартных приемов и методов математики [2, с. 1202]. Понятно, что в топологии, как в особом разделе математики, должна применяться своя, особая, топологическая, эвристика. Будем считать, что топологическая эвристика – это математическая эвристика в полном смысле этого слова, но связанная исключительно с топологией, и в рамках топологии применяющаяся. Как мы увидим здесь в дальнейшем, основная задача топологической эвристики – это «сведение» топологического объекта к объектам эвклидовой геометрии, что существенно упрощает решение топологических задач. Понятно, что формирование новой эвристики в математике происходило на протяжении всей истории ее развития, но, думается, что все же ситуация с формированием именно топологической эвристики имеет особую специфику. Как представляется, эта специфика определяется прежде всего особенностями топологической интуиции, поскольку любая эвристика в математике формируется в результате деятельности интуиции. Использование специального термина для обозначения именно топологической интуиции позволяет отличать топологическую интуицию от интуиции математической.

Советский математик, один из пионеров в области топологических исследований, П. С. Александров, оценивал топологическую интуицию следующим образом: «„Топологическая“ интуиция обычно считается частным случаем общегеометрической; однако этот частный случай обнаруживает сам по себе такое богатство и разнообразие различных возможностей и, с другой стороны, так сильно отличается от других видов геометрической интуиции, что, вероятно, заслуживает выделения в особую категорию» [3]. Поэтому представляется вполне корректным выделение топологической интуиции как особого рода интуиции математический. Поясняя свою точку зрения, П. С. Александров отмечает, что «Интуиция тополога не связана с прямыми линиями, с перспективными преобразованиями и другими образами, столь фундаментальными, например, для проективного геометра. Топологическая интуиция – это интуиция формы и расположения фигур в чистом виде...» [3]. Для обоснования правомерности такого подхода, а также для выявления специфики природы топологической интуиции, необходимо исследовать основные принципы топологии.

Здесь уже отмечалось, что топология связана с преобразованием фигур в пространстве и представляет собой динамично развивающуюся область современной математики. Основной идеей топологии является идея непрерывности, а ее базовыми понятиями являются понятия «гомеоморфизма» и «конгруэнтности». Говорят, что фигуры «конгруэнтны», если расстояния между их соответствующими точками равны. «Гомеоморфизм» в топологии представляет собой отображение без «разрывов» и «склеиваний», а также без образования «складок». Теперь обратимся к примерам топологических объектов, эвристические преобразования для которых осуществляются посредством топологической интуиции. Это позволит выявить и отразить специфику топологической интуиции [4, с. 9].

Пример I. Совокупность всех действительных чисел, то есть числовая прямая. В самом деле, на числовой прямой естественным образом определяется следующее отношение близости: два числа близки, если абсолютная величина их разности крайне мала. Этим соотношением определяется топологическая структура числовой прямой.

Пример 2. Множество всех комплексных чисел «гомеоморфно» множеству всех точек обычной плоскости.

Пример 3. Пусть 0 – какая-либо точка внутри треугольника, вписанного в круг. На каждом луче, выходящем из O, отметим две точки: P – пересечение его с окружностью, и Q – пересечение его с контуром треугольника. Отобразим отрезок OP пропорционально на OQ, то есть «заставим» точку A отрезка OP соответствовать точке B отрезка OQ, удовлетворяющей условию OB:OQ = OA:OP. Если мы это сделаем для любого радиуса, то получим топологическое отображение Φ круга на треугольник. Итак, треугольник «гомеоморфен» кругу, а его контур «гомеоморфен» окружности [4, с. 9].

Из приведенных примеров можно заключить, что специфика топологической интуиции связана с формами и расположением фигур, а «идея непрерывности», на основе которой осуществляется деятельность топологической интуиции субъекта познания, скорее всего, как считали в свое время разработчики основных принципов топологии, «выражает коренные свойства пространства и времени, и имеет, следовательно, фундаментальное значение для познания» [5, с. 394]. Надо сказать, что исследования современных ученых подтвердили особое значение топологии для современной науки [4, с. 394].

Сама топология базируется на таких понятиях, как «узлы», «расслоения», «накрытия», а топологическая интуиция «работает» в пространстве. Понятно, что топологическая эвристика связана с топологическими преобразованиями фигур, то есть со свойствами фигур, не меняющимися при «гомеоморфизмах», и включает такие приемы, как «растяжение» и «сжатие» фигур. Мы получим, например, топологическое преобразование фигуры, если будем деформировать ее как угодно, лишь бы при этом не происходило «разрывов» и «склеиваний». Так, окружность может деформироваться в эллипс, в овал неправильной формы, в многоугольник – вообще в любую простую, то есть без двойных точек, замкнутую линию. Однако при такой деформации окружность не может превратиться в незамкнутую линию, так как для этого ее пришлось бы разорвать. Также окружность не может превратиться в лемнискату («восьмерка»), поскольку для этого пришлось бы соединить две ее точки в одну, то есть произвести запрещенное в топологии «склеивание». Точно также при помощи топологических преобразований сферу можно превратить в поверхность эллипсоида, куба и т.п. Однако сферу нельзя превратить в тор по тем же причинам.

Из приведенных примеров понятно, что к эвристическим операциям в топологии мы можем отнести «склеивание», посредством которого уничтожаются «дыры», а также различного рода «разрезы»: например, триангуляцию – разрезание фигуры на некоторое число связанных между собой треугольников. Кроме того, топологическая эвристика допускает передвижение различных одномерных фигур на поверхности преобразуемых пространственно-топологических фигур. Думается, что все эти приведенные примеры убеждают в том, что топологическая эвристика – это действительно качественно новая эвристика, которая в отличие от прежней, «просто» математической эвристики, проводит достаточно свободные преобразования фигур в пространстве, пусть и ограниченные определенными условиями. Согласитесь, что ни в аналитической, ни в дифференциальной, ни тем более в элементарной геометрии, мы не встречали ничего подобного. Интересно, что, по всей видимости, практически любая фигура в смысле какой-либо другой геометрии (аффинной, дифференциальной и т.д.) может естественным образом рассматриваться и как некое топологическое пространство. Понятно, что в этом смысле топология является наиболее общей геометрией, однако многие свойства фигур, которые изучаются в других геометриях, сознательно игнорируются в топологии. В элементарной геометрии, это, например, свойства углов треугольника. Пожалуй, единственным «топологическим» свойством фигур элементарной геометрии является свойство биссектрис углов треугольника пересекаться в одной точке.

Отметим еще одну интересную операцию топологической эвристики – топологическое «перемножение», в соответствии с которым евклидова плоскость – это произведение двух прямых, а произведение двух окружностей – поверхность тора. Однако, при всех качественных отличиях от предшествующей эвристики, топологическая эвристика, по нашему глубокому убеждению, обусловлена все той же абстрактной интуицией, то есть интуицией математической. При этом топологическая эвристика несводима к какой-либо «нетопологической» математической эвристике, кроме плоскостной геометрической, и абстракции топологии для непривычного к ним математика требуют значительно большего интуитивного усилия, чем абстракции какой-либо из названных здесь непространственных геометрий, особенно если изучать топологию позже таких геометрий. Вместе с тем хочется верить, что «объекты топологии – это ни что иное как объекты абстрактной или математической интуиции» [5, с. 394]. Но, разумеется, есть то, что отличает топологическую интуицию от математической: это, прежде всего, объекты, с которыми имеет дело интуиция как наглядное созерцание, иначе говоря, это так называемые «первоначальные интуиции». Действительно, в геометриях различного рода – это разнообразные плоскостные фигуры, а в топологии – фигуры пространственные. Интересно, что согласно исследованиям Ж. Пиаже, семилетние дети справляются с ними едва ли не легче, чем с первоначальными интуициями геометрии геометрии Евклида [6, с. 292–410]. Думается, что базовое для топологии представление о свойстве подобия геометрических фигур, также как и базовые понятия евклидовой геометрии, корректно будет отнести к априорному (доопытному) знанию.

Можно предположить, что при изменении первоначальных интуиций и переходе к другой системе операций, что и происходит при переходе от элементарной геометрии к топологии, как бы «включается» другой вид математической интуиции, обусловленный в основном способностью субъекта познания преобразовывать пространственные объекты. Понятно, что речь идет об интуиции топологической. Очевидно, что этот вид математической интуиции имеет дело с более сложными абстракциями, чем предшествующая, «нетопологическая», интуиция. Вместе с тем, согласно исследованиям Ж. Пиаже, нельзя утверждать, что интуитивное усилие, требующееся для работы с топологическими объектами, так же должно быть более серьезным, т.к. Ж. Пиаже не проводит такое сравнение.

Ранее, до возникновения топологии как раздела математики, пространственная интуиция человеческого разума проявлялась исключительно на художественном уровне – в живописи и архитектуре, где ее проявления, конечно же, требовали исключительной конкретности, и не могли быть абстрактными, как это требуется в топологии.

Выявив специфику топологической эвристики, мы видим, что практически сам собой здесь возникает вопрос о соизмеримости математической и топологической эвристик. Этот вопрос будем решать на основе исследования возможности «перевода» топологической эвристики в эвристику евклидовой геометрии. Понятно, что если такая возможность существует, данные эвристики соизмеримы, если нет, то несоизмеримы, и тогда топологическая интуиция действительно должна рассматриваться как интуиция особая, несводимая к интуиции математической. Если математическая и топологическая эвристики соизмеримы, то исследования топологической эвристики позволят сблизить, в некотором отношении, интуицию пространственно-художественную, связанную с искусством и интуицию абстрактно-пространственную, математическую. Эта особенность топологической интуиции эвристическим образом также проливает некоторый свет на так называемую «непостижимую эффективность математики» по отношению к естественным наукам, в основном к физике. Если математическая и топологическая эвристики соизмеримы, можно предположить, что, в конечном счете, все виды интуиции, свойственные человеку, связаны воедино, а сам человек как субъект познания, в силу развития исторической логики познания, вполне способен осознать эту связь.

Противоречит этому утверждению тот факт, что многие эвристические приемы топологии вообще трудно квалифицировать как математические, во всяком случае, в традиционном понимании. Например, такой эвристический прием как «склеивание», который можно понимать как простое соединение; или как «разрез», который следует понимать в обыденном бытовом смысле, как разрез, например, с помощью ножниц. Пониманию сути топологической эвристики способствует прежде всего наглядность всех ее операций, а также необычность и оригинальность этих операций с точки зрения привычной математики. Представляется, что эта особенность топологической эвристики пробуждает интуицию и воображение, а также делает топологию интересным объектом приложения не только математической, но и философской мысли. В самом деле, среди объектов топологии мы видим такие необычные с точки зрения традиционной математики конструкции как, например, лента Мебиуса (односторонняя поверхность), а также различного рода сферы – с «вклеенными» или «вывернутыми» «ручками», с «вклеенными» поверхностями Мебиуса, и, конечно, многие другие занимательные и, вместе с тем, сложнейшие математические объекты. Однако наиболее интересным приемом топологической эвристики, несомненно, является уже упомянутое здесь нами ранее «топологическое перемножение», посредством которого можно представить, например, поверхность тора как произведение двух окружностей. Такие исследования, по нашему глубокому убеждению, способствуют лучшему пониманию топологии и развитию топологической интуиции. Понятно, что топологическое перемножение должно способствовать более эффективному «выяснению взаимоотношений» между топологией и предшествующей ей элементарной геометрией.

Все сказанное по поводу топологического перемножения с полным правом можно отнести и к такому эвристическому приему топологии как триангулирование (разрезание на соединенные между собой треугольники) или вообще разрезание топологического объекта на какое-либо количество объектов элементарной геометрии. Понятно, что помимо наглядного представления разрезаемой (триангулируемой) топологической фигуры, мы должны иметь наглядное представление и соответствующего объекта элементарной геометрии – например, треугольника, четырехугольника и т.д.

Кроме того, одним из важнейших средств «выяснения взаимоотношений» между топологией и элементарной геометрией является разделение теорем и свойств объектов элементарной геометрии на «топологические», и, соответственно, «нетопологические». В качестве примера «топологической» теоремы элементарной геометрии можно привести теорему о пересечении в одной точке всех биссектрис треугольника, хотя понятно, что свойство биссектрисы угла треугольника разделять угол на две равные части топологическим не является. Полезно, в этом отношении, выявление геометрических фигур, инвариантных относительно преобразований, происходящих без «разрывов» и «склеиваний», то есть относительно гомеоморфизмов. Например, окружность может деформироваться в эллипс, овал неправильной формы, в многоугольник – вообще, в любую простую замкнутую линию (о есть без двойных точек), и подобные деформации будут «гомеоморфны».

В заключение сделаем одно важное замечание методологического характера. Для установления более прочных связей топологии и элементарной геометрии, наиболее плодотворным представляется обращение к ранним работам по топологии, датированным примерно второй половиной тридцатых годов прошлого века [2]. Общеизвестно, что исторические исследования раннего периода формирования и развития математического метода содержат больше всего эвристического материала, то есть дают больше всего возможностей для отслеживания неявной эвристики, исторически предшествующей эвристике явной, согласно концепции эволюции математической эвристики [7, с. 200]. Это значит, что ранние исторические исследования позволяют наилучшим образом выявить связи между формирующейся областью математики и уже некоторыми уже сформированными и хорошо разработанными к этому периоду областями математики.

Представляется, что топологическая эвристика является наиболее интересной из новых эвристик математики, поскольку она продуцируется совершенно новой разновидностью математической интуиции, а именно, абстрактно-пространственной интуицией. Можно ли считать, что топологическая интуиция – это наиболее «геометрическая среда всех разновидностей геометрической интуиции»? [3]. Думается, что да, можно – при условии, что геометрию мы будем рассматривать как абстрактную математическую науку о пространстве, ориентируясь при этом, подобно А. Эйнштейну, на соотнесение результатов с физической реальностью. И, конечно же, без обращения к топологической интуиции невозможна была бы разработка так называемых «унивалентных оснований математики», ставших в наши дни базовой идеей для разработки новых перспективных математических подходов, которые в итоге могли бы обеспечить возможность автоматической проверки правильности доказательств на компьютере [8]. С учетом того, что в развитии математики существенную роль играют так называемые неявные элементы знания, в это сложно поверить, но, тем не менее, какой-то новый поворот в развитии математической науки, безусловно, намечается. Однако при этом не следует забывать, что речь не идет о какой-либо эволюции математической интуиции. С учетом исследований Пиаже это можно утверждать наверняка [6]. Скорее всего, существуют различные типы математической интуиции, порождающие различные стили математического мышления. Разумеется, переход к новому типу интуиции в математическом познании как базовому, т.е. переход от традиционной геометрической интуиции к топологической интуиции, сам по себе далеко непрост, однако сегодня в эпоху мыслимых и немыслимых социальных и образовательных экспериментов, в обучении математике, возможно, следует основываться на топологической интуиции, а не так называемых «первоначальных интуиций» евклидовой геометрии. И тогда уже, по результатам таких экспериментов, делать окончательные философские и методологические выводы.

Что касается признания или непризнания принципа априоризма в математике, что, как известно, представляет собой важнейшую проблему теории познания, то выделение топологической интуиции вряд ли что-то здесь кардинально меняет. В соответствии с исследованиями Ж. Пиаже, первичная интуиция субъекта формируется как топологическая, а не как интуиция, связанная с эвклидовой геометрией. В такой гносеологической ситуации в целях обоснования математики, еще более естественно, по сравнению с кантовской «Критикой чистого разума», апеллировать к такой априорной форме созерцания как пространство. Дело в том, что евклидова геометрия двумерна, а пространство, как это доказано А. Пуанкаре, трехмерно, как и сама топология.

Таким образом, можно заключить, что топологическая интуиция фундаментальна, носит абстрактно-пространственный характер, представляет собой отдельный тип математической интуиции, и, возможно, является первичной по сравнению с традиционно понимаемой математической интуицией, связанной с евклидовой геометрией. Обусловленное современной гносеологической ситуацией повышение уровня абстрагирования в математике и необходимость трансформации математической науки для решения инновационных задач современного естествознания, в свою очередь, обуславливает необходимость дальнейшего философско-методологического исследования природы топологической интуиции как отдельного типа интуиции математической.

Литература

1. Вейль Г. *Математическое мышление.* М.: Наука, **1989**.
2. Султанова Л. Б. Феномен неявного знания в математике // *Вестник Башкирского университета.* **2009**. №3(1). С. 1200–1204.
3. Александров П. С. Пуанкаре и топология // *Успехи математических наук.* **1972**. Т. XXVII. Вып. 1(163). С. 147–158.
4. Александров П. С., Ефремович В. А. *О простейших понятиях современной топологии.* М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, **1935**.
5. *Математическая энциклопедия.* М.: Сов. Энциклопедия, **1977**. Т. 1.
6. Пиаже Ж. Генезис числа у ребенка // *Избранные психологические труды.* М.: Международная педагогическая академия, **1994**. С. 292–410.
7. Султанова Л. Б. Эволюция математики в свете постнеклассической научной парадигмы // *Вестник Башкирского университета.* **2013**. Т. 18. №1. С. 199–202.
8. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* Princeton: Institute for Advanced Study, **2013**. 603 p.

Поступила в редакцию 09.02.2016 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2016.1.2

The nature of the topological intuition

© L. B. Sultanova

Bashkir State University
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: sultanova2002@yandex.ru

The article is devoted to the nature of the topological intuition and disclosure of the specifics of topological heuristics in the framework of philosophical theory of knowledge. As we know, intuition is a one of the support categories of the theory of knowledge, the driving force of scientific research. Great importance is mathematical intuition for the solution of non-standard problems, for which there is no algorithm for such a solution. In such cases, the mathematician addresses the so-called heuristics, built on the basis of guesswork, obtained by intuition. The author substantiates the conclusion that topological intuition significantly specific compared to a traditional mathematical intuitions of Euclidean geometry. Today topology is a rapidly developing field of modern mathematics, integrates nicely with other sections of mathematical science. In its most general form of the topology can be defined as the branch of mathematics that studies the properties of spatial figures, does not change under deformations. The topological intuition is an instrument for development of topology on the basis of typological heuristics, which is the result of applying topological intuition to the objects topology. The author demonstrates in detail providing with the examples the specificity of topological heuristics and establishes its interconnection with Euclidean geometry. The author draws the conclusion about the fundamentality of topological intuition, and that it, perhaps, is primary in relation to traditionally understood mathematical intuition.

Keywords: *topological studies in mathematics, mathematical heuristics, topological heuristics, heuristic conversion topology, elementary geometry, initial intuition, univalent foundations of mathematics, implicit elements of knowledge, a priori in mathematics.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Sultanova L. B. The nature of the topological intuition // *Liberal Arts in Russia.* **2016.** Vol 5. No. 1. Pp. 14–21.

References

1. Veil' G. *Matematicheskoe myshlenie [Mathematical thinking].* Moscow: Nauka, **1989**.
2. Sultanova L. B. *Vestnik Bashkirskogo universiteta.* **2009***.* No. 3(1). Pp. 1200–1204.
3. Aleksandrov P. S. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* **1972***.* T. XXVII. No. 1(163). Pp. 147–158.
4. Aleksandrov P. S., Efremovich V. A. *O prosteishikh ponyatiyakh sovremennoi topologii [On the most basic concepts of the modern topology].* Moscow: Ob''edinennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo NKTP SSSR, **1935**.
5. *Matematicheskaya entsiklopediya [Mathematical encyclopedia].* Moscow: Sov. Entsiklopediya, **1977**. Vol. 1.
6. Piazhe Zh. *Izbrannye psikhologicheskie trudy.* Moscow: Mezhdunarodnaya pedagogicheskaya akademiya, **1994**. Pp. 292–410.
7. Sultanova L. B. *Vestnik Bashkirskogo universiteta.* **2013***.* Vol. 18. No. 1. Pp. 199–202.
8. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* Princeton: Institute for Advanced Study, **2013**.

Received 09.02.2016.