DOI: 10.15643/libartrus-2014.4.1

ПРИРОДА ЧИСЕЛ В СВЕТЕ РАСШИРЕННОЙ ТРАКТОВКИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

© Е. И. Арепьев

Курский государственный университет
Россия, 305000 г. Курск, ул. Радищева, д. 33.

Тел.: +7 (4712) 70 33 52.
Email: arepiev@yandex.ru

Статья по философии математики. Традиционная проблема существования математических объектов и истин решается через реконструкцию онтологических понятий действительного и возможного. Работа освещает ряд проблем и вариантов развития некоторых течений философии математики. В статье предлагаются аргументы в пользу реалистической трактовки основ математики в свете расширенного истолкования понятия действительности. Работа также содержит элементы указанной онтологической интерпретации: выделение базисных компонент и детальное истолкование арифметической компоненты.

Ключевые слова: *существование математических объектов, реализм, онтологические основания арифметики.*

Прежде, чем приступить к обсуждению конкретных деталей построения интерпретации математики в свете нетрадиционного понимания действительности, рассмотрим аргументы математического реализма.

Говоря о критериях истинности, определяя их роль для различных областей знания, мы отчасти раскрываем онтологическую основу этих областей. В качестве определяющих критериев можно принять эмпирические, рационалистические критерии, а также критерий практики. Соответствуют ли истины математики действительности? И, если да, то какой действительности? Для прояснения этого вопроса рассмотрим связь математических истин с основными группами критериев истинности.

Как математическое знание связано с эмпирией? Известно, что идея признания математических истин эмпирическим знанием, с определенными оговорками и в разных интерпретациях, находит своих последователей. Но можем ли мы признать истины математики эмпирическими обобщениями, если не удается обнаружить примеры их опровержения опытным путем? Возможно ли представить, что ученый, столкнувшись с противоречием математических расчетов и экспериментальных данных, просто признает, например, что иногда два плюс два равно пяти?

С другой стороны, нельзя согласиться и с теми, кто утверждает, что истины математики никак не связаны с опытом, не подтверждаются и не опровергаются им, так как не имеют отношения к действительности, выступая лишь способом нашего познания. Это попросту не так! Во-первых, математика нередко открывает нам абстрактные модели таких областей реальности, материального мира, которые удается описать естественнонаучным путем лишь спустя значительное время. Во-вторых, эмпирические критерии истинности опосредованно подтверждают законы и положения математики через их безотказно эффективное использование в естественнонаучном постижении мира.

Еще более очевидным свидетельством выступает критерий практики. Если понимать под практикой целенаправленное, планируемое и прогнозируемое преобразование действительности человеком, то современное материальное производство, например, просто громогласно провозглашает истинность математических утверждений! Опираясь на математические понятия и законы мы преобразуем мир, и успешность такого преобразования, получение ожидаемых результатов подтверждает соответствие наших знаний действительности. Однако, если эмпирическое знание или принципы и закономерности естественных наук могут уточняться практикой, то истины математики – только подтверждаются практически, и это, опять же, говорит нам об их неэмпиричности.

Наконец, когда мы говорим о рационалистических критериях, о логичности, последовательности, непротиворечивости, аргументированности системы знаний, о ее упорядоченности и согласованности, то здесь, необходимо признать, что математика не только приоритетно ориентируется на эти критерии, но и выступает эталоном рационального знания, служит источником и индикатором формирования критериев научной рациональности. А эти критерии говорят нам об истинности математических утверждений, их объективном статусе, то есть принадлежности бытию!

Влиятельность течения реализма признают многие авторы. В. В. Целищев указывает, что платонизм выступает онтологией работающих математиков [5, с. 31–37], и нельзя не согласиться, что такой философский фундамент позволяет им действовать весьма успешно. М. Даммет отмечает особенность эволюции взглядов многихмыслителей, состоящую в конечном принятии «усложненного» реализма [6, p. 472]. О реализме, как одной из «базисных интуиций» говорит Х. Патнем [3, с. 66–68]. Вместе с тем, рассуждения об этих аргументах, как правило, заканчиваются системой контраргументов, задача которых оправдать неприятие реализма.

Реалистическими аргументами из истории науки можно считать то, что кажущаяся нелепость попыток исследовать некий идеальный мир математических сущностей вполне сопоставима с пессимизмом по поводу познания различных сфер материального мира. Например, изучение микромира, изучение физических полей длительное время не представлялось возможным, хотя, казалось бы, эти исследования задолго до этого были предвосхищены философскими умозрительными конструктами (атомы Демокрита, флюиды Декарта и пр.). История науки предлагает также разнообразные примеры математического предвосхищения. Признанию кривизны, вообще возможности варьирования параметров физического пространства-времени предшествовали математические результаты Н. И. Лобачевского. Примером также служит разработка теории многомерных пространств (Калуца, Клейн и др.), которая около полувека считалась математическим упражнением, лишенным физического смысла. О наличии многочисленных предвосхищений говорит Е. Вигнер в своей знаменитой статье «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» [2].

Ученые неоднократно решались на разработку новых, неизведанных областей, о свойствах и структуре которых было известно довольно мало: трансцендентные и трансфинитные числа, сила тяжести, электричество и магнетизм, молекула, атом и пр. Такие исследования, как мы знаем, оказывались весьма продуктивными. Можно сказать, что сейчас, видимо, перед философией науки встает задача разработки программы математического реализма, с тем, чтобы впоследствии часть ее проблем и результатов перешла в ведение конкретных наук.

Значимым фактором, мешающим признанию, а значит и развитию математического реализма, является проблематичность построения, отсутствие приемлемых онтологических моделей. Центральным сегодня по-прежнему остается вопрос: каким образом существуют объекты и истины математики, где находится эта часть действительности? На этот вопрос, видимо, нельзя ответить, если понимать под действительностью лишь материальный мир, если противопоставлять «действительность» и «возможность». Для решения этого вопроса, на наш взгляд, необходимо понять в буквальном смысле словосочетание «существует возможность», или лучше – «возможность существует!» Возможность – это часть действительности! Истины и объекты математики – это абстрактные выражения универсальных законов воплотившихся возможностей и всего возможного вообще.

Здесь необходимо пояснить идею расширенного понимания действительности. Мы привыкли рассматривать в качестве действительности лишь воплотившуюся возможность, но всегда ли между ними можно провести четкую границу? Разрабатывая законы и систему наказаний для их нарушителей, государство использует высоковероятную возможность как механизм воздействия на воплощенные возможности, на действительность в привычном понимании этого слова, в частности – на общественные отношения: многие люди не совершают преступлений не в силу нравственного запрета, но в силу наличия возможности (высоковероятной возможности) наказания. С другой стороны, выходя на улицу, каждый человек понимает, что существует теоретическая возможность падения на голову кирпича, но поскольку эта возможность имеет малую вероятность, никто не корректирует свои планы и действия, исходя из нее. Тут мы видим различную степень влияния возможного на действительное, но очевидно, что процессы действительности зависимы от влияния возможностей. Хищник направляется в места, где наиболее высоковероятна возможность встретить добычу, любое дикое животное своим поведением стремится минимизировать возможные опасности. Человек стремится добиться обладания большим спектром возможностей и наслаждается этим обладанием, часто не реализуя многое из того, что для него возможно: богатый не покупает всего, что мог бы купить, сильный не всегда применяет силу там, где мог бы, но при этом оба получают удовлетворение от того, что всё это возможно в принципе, то есть от самой возможности и именно к возможности стремятся.

Каким образом мы должны интерпретировать «действительность», если согласимся расширить ее понимание, включая в нее «возможность»? Представляется уместным предложить следующее определение. Действительность – это совокупность возможностей, обладающих различным статусом по отношению к реализации (к воплощению). Границами действительного выступают невозможное, с одной стороны, и необходимое – с другой. Между ними располагаются нереализованные, маловероятные, вероятные, высоковероятные и реализованные возможности. К этому новому пониманию действительности можно добавить характеристику сочетания дискретности и непрерывности: степень вероятности возможностей можно характеризовать как варьируемую на непрерывном множестве значений, а нереализованные и реализованные возможности выступают дискретно выделенными переходами от вероятного к невозможному, и необходимому соответственно.

Итак, мы утверждаем, что математические истины суть априорно заданные условия существования и функционирования разума, выражающие универсальные принципы возможного вообще. Заметим, что невозможное также может быть выражено математическими понятиями (треугольный квадрат, круглый ромб, парикмахер в известном парадоксе), но целесообразность попыток анализа невозможного на данный момент под вопросом.

Исходя из расширенного понимания действительности рассмотрим ряд элементов реалистической интерпретации базисных принципов математики.

Прежде всего, в математическом знании можно выделить, по крайней мере три области, сущностные базисы которых нетождественны. Это, условно говоря, «арифметическая» составляющая математического знания, опирающаяся на производные положения от количественных и порядковых отношений; «геометрическая», оперирующая истинами и объектами, имеющими пространственные атрибуты; «логическая» составляющая, то есть совокупность областей, занимающихся выражением свойств причинно-следственных, конъюнктивных и других связей. Нетождественность онто-гносеологических базисов названных составляющих математического знания, на наш взгляд, вполне очевидна на современном этапе развития математики и ее базисных принципов.

Действительно, история идеи логицизма вместе с результатами К. Геделя убедительно демонстрируют нам несводимость арифметики к логике. Попытки сведения оснований математики (арифметики) лишь к логическим законам не могли дать ожидаемых результатов, кроме результатов, утверждающих неотъемлемость логической составляющей в сущностном фундаменте математического знания. Можно отметить, что проблемы в определении общих и специфических черт двух ветвей логики –философской и математической – в значительной мере обусловлены тем обстоятельством, что «проекция» математической логики на естественный язык стала разрабатываться гораздо раньше, чем сама «чистая», то есть математическая, логика, или, если угодно, последняя начала развиваться в единстве с этой «проекцией». Логика развивалась в «проекции» на естественный язык, что в некоторой степени схоже с тем, как теория вероятностей развивалась в «проекции» на игровую сферу интеллектуальной активности человека. Тогда как другие математические области – геометрия, арифметика отделились от своих проекций на природу и другие области на ранних стадиях развития.

Итак, основания арифметических и логических разделов математики нетождественны. Аналогичным образом дело обстоит с отношением основ арифметической и геометрической составляющих: «неоднородность» числового ряда и «однородность» прямой, различие видов интуиции в указанных сферах,– это (и многое другое) говорит о наличии сущностных отличий. Что же касается отношения основ «геометрической» и «логической» составляющих, то отличия также очевидны, поскольку у этих областей явно отличаются и типы интуиции (созерцательная и рассудочная, условно говоря), и сферы наиболее эффективного приложения (материя, пространство и разум, мыслительные процессы).

Таким образом, мы можем выделить по крайней мере три базисных составляющих, что позволяет предварительно внести в схему онто-гносеологической интерпретации основ математики несколько тезисов:

- все области математического знания, опирающиеся лишь на производные положения от количественных и порядковых отношений, основываются на исходных, априорно заданных принципах разума, служащих неотъемлемой его составляющей, то есть возможностью его существования, и относящихся к свойствам действительности (материальной, идеальной, потенциальной), выражающим ее непрерывный и дискретный характер;

- геометрические исходные истины, вернее, сама возможность построения системы геометрических истин, также является неотъемлемой составляющей разума, выражающей в его рамках универсальные, общие формы существования материального мира;

- все разделы математической логики, то есть области математики, выражающей специфику причинно-следственных, конъюнктивных и пр. связей, а также свойств функционирования разума, т.е. процесса рассуждения, основываются на необходимой компоненте разума, позволяющей выражать возможности построения и функционирования любых систем, в том числе и математических.

Очевидно, что все три компоненты основ математического знания имеют обширные производные области, в которых они пересекаются. Однако эти составляющие фундамента математики не тождественны, а специфичны. Общим же, определяющим саму принадлежность к математике для всех областей является то, что они выражают универсальные законы не только всего существующего, не только гипотетического, но и всего возможного вообще.

Что же касается вопроса об отношении к бытию разума и вместе с ним базисных основ математического знания, то представляется правомерным предположить, что разум принадлежит реальности, сущему в той же мере, в которой относятся к реальности все возможности ее развития, преобразования и существования.

Если принять вышеперечисленные положения в качестве исходных установочных гипотез, то можно попытаться разработать некоторый вариант детального онто-гносеологического истолкования математики. Для построения подобного истолкования основ данной науки необходима их структуризация и поэтапное обоснование, разъяснение элементов этой структуры. Приняв намеченную выше структуризацию, будем считать, что в первой, «арифметической» составляющей, прежде всего, нуждаются в объяснении числа. Особое внимание, как нам представляется, необходимо уделить нулю, единице и двойке. Специфичность их отмечалась и ранее. Фреге, например, указывает, что «…числа по природе вещей имеют свой порядок, каждое образуется собственным способом и обладает своеобразием, особенно заметным у 0, 1 и 2» [4, с. 37]. Итак, начнем с ноля.

Ноль можно истолковать как абстрактное выражение возможности наличия. Например, когда в десятичной дроби ставятся ноли после запятой, подразумевается, что после нолей будет стоять какая-то цифра или цифры и что существует возможность вхождения в данную дробь десятых, сотых и т.д. долей, но там, где стоят нули, эта возможность не реализована. Так, число 0.0460007 выражает, помимо прочего, нереализованные возможности присутствия десятых, десятитысячных, стотысячных и миллионных долей. Число же 0.201 содержит в себе указание на нереализованную возможность наличия сотых долей. Аналогичным образом можно продемонстрировать приведенные рассуждения на натуральных, целых и других числах: 104023008; −2453067; 4.(209) и т.п. Ноли будут указывать на возможности наличия единиц, десятков, сотен и пр. до определенного значения, в зависимости от количества знаков в числе, или же на возможности наличия десятых, сотых и т.д. долей. При обучении детей счету учитель говорит, что если из корзины, в которой находится пять яблок, вынуть два яблока, а затем, вынуть еще три, то в корзине останется ноль яблок. Число оставшихся яблок – «ноль яблок» – указывает на возможность их наличия, тогда как возможность наличия других объектов, например, пароходов или метеоритов, не подразумевается.

Здесь вполне уместен вопрос о том, не будет ли более точным истолкование нуля как математического выражения нереализованной возможности наличия? Ответ на этот вопрос, по нашему мнению, будет отрицательный, поскольку, например, число 1000 состоит все же из единиц, десятков и сотен, и истолкование нулей в нем как нереализованных возможностей наличия порождает двусмысленность, противоречивость. Таким образом, ноль – это абстрактное выражение возможности наличия, являющееся безотносительным к реализации самой возможности. При этом необходимо особо отметить, что возможность нельзя отождествлять с вероятностью. Вероятность можно предварительно определить, как количественное выражение возможности. Сама же возможность должна пониматься как принципиальная допустимость вообще. Например, вероятность достать белый шар из ящика, содержащего только десять черных шаров, равна нулю, но это принципиально допустимо (Лейбниц или Витгенштейн сказали бы – логически допустимо), то есть возможно, в принятом нами понимании этого слова, в отличие от исхода, когда мы достаем кубический шар, или треугольный квадрат. В этом смысле принятое название «невозможное событие» было бы правильнее заменить на «невероятное событие».

Продолжим наше рассуждение истолкованием следующего числа – единицы. **Единица** может быть истолкована как абстрактное выражение реализовавшейся возможности наличия. Например, когда мы записываем число 0.1, мы указываем, что реализована возможность наличия определенной (десятой) доли, а когда записываем число 10, то указываем на реализацию возможности наличия определенного количества (десятка) и т.д. В принципе, помня о возможности перевода десятичной системы исчисления в двоичную, можно было бы сказать, что сущностный фундамент чисел в основном намечен. Однако возможность редукции, как мы знаем из ряда примеров, не означает тождественности онтологических и гносеологических оснований. Действительно, геометрия, что отмечено выше, имеет собственные онто-гносеологические основания, отличные от арифметических, хотя геометрические отношения, благодаря работам Декарта и других, переводимы в числовые с достаточной степенью полноты. Б. Рассел, пытаясь воплотить идею сводимости оснований всей математики к логике, определяет геометрию как область исследования последовательностей двух или более измерений, то есть как продолжение «чистой математики» в терминологии Рассела [7, p. 372]. В нашей же интерпретации это определение сводит геометрию к арифметической составляющей математики, что, как уже отмечено, не соответствует реальному положению дел. Таким образом, редуцируемость десятичной системы исчисления к двоичной не предписывает необходимость ограничения компонентов сущностного истолкования чисел.

Сущностной интерпретацией следующего числа – **двойки** – может служить истолкование ее как абстрактного выражения наличия альтернативы, вариантности, неоднозначности. Например, говоря о том, что длина одного отрезка больше длины другого, или говоря о том, что десять больше семи, мы указываем лишь на количественные различия, различие же между единицей и двойкой является еще и качественным различием, имеющим сущностный фундамент. Если единица – это выражение реализовавшейся возможности наличия, то двойка – это выражение реализовавшейся возможности (наличия) альтернативы, наличия выбора.

Что касается тройки и других чисел-цифр, то здесь нам необходимо признать отсутствие (возможно, что и временное) аналогичного истолкования. Однако, скорее всего, это отсутствие само по себе выступает интерпретацией в том смысле, что в данном аспекте сущностных особенностей натуральные числа фактически нуждаются в трех базисных элементах, обладающих наиболее ярко выраженной онтологической спецификой. Натуральные числа, таким образом, предстают в виде разнообразного сочетания выражений возможностей наличия, реализовавшихся возможностей и альтернатив. Это относится и к числам-цифрам, и к остальным. Очевидно, при этом, что наиболее удобной является десятичная система, и эта «удобность» не может считаться без веских оснований случайной. Видимо, она является следствием из еще не определенных сущностных особенностей чисел.

Онтологическое истолкование основ арифметики можно несомненно дополнить истолкованием понятийной базы других составляющих математического знания – геометрической и логической [1]. Вполне возможно также, что в истолковании будут нуждаться ключевые понятия многих разделов математики, например, понятие мнимой единицы, бесконечно малой величины, предела и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арепьев Е. И. *Домножественная реалистическая интерпретация онто-гносеологических основ математики* // Вопросы философии. М., **2010.** №7. С. 82–92.
2. Вигнер Е. *Непостижимая эффективность математики в естественных науках* // Этюды о симметрии / Под ред. Я. А. Смородинского. М., **1971.**
3. Макеева Л. Б. *Философия Х. Патнэма.*
4. Фреге Г. *Основоположения арифметики. Логико-математическое исследование понятия числа.* Томск, **2000.**
5. Целищев В. В. *Философия математики.* Ч. 1. Новосибирск: Наука, **2002.**
6. Dummett M. *The interpretation of Frege's philosophy.* London, **1981.**
7. Russell B. *The Principles of Mathematics 2nd td.* London, **1937.**

Поступила в редакцию 11.07.2014 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2014.4.1

THE NATURE OF NUMBERS IN THE LIGHT OF A BROADER INTERPRETATION OF REALITY

© E. I. Arep’ev

Kursk State University
33 Radishchev St., 305000 Kursk, Russia.

Phone: +7 (4712) 70 33 52.
Email: arepiev@yandex.ru

The article concerns the problems of philosophy of mathematics. The traditional problem of the existence of mathematical objects and truths is solved through the reconstruction of the ontological concepts of the real and possible. The work deals with the problems and development options of certain trends in the philosophy of mathematics. The article describes the arguments in favour of a realistic interpretation of the foundations of mathematics in the light of the extended interpretation of reality. The work contains also the elements of specified ontological interpretation: allocation of the basic components and a detailed interpretation of the arithmetic component.

Keywords: *the existence of mathematical objects, realism, ontological foundations of arithmetic.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Arep’ev E. I. The Nature of Numbers in the Light of a Broader Interpretation of Reality // *Liberal Arts in Russia*. **2014**. Vol. 3. No. 4. Pp. 229–236.

REFERENCES

1. Arep'ev E. I. *Voprosy filosofii.* M., **2010.** No. 7. Pp. 82–92.
2. Vigner E. *Etyudy o simmetrii.* Ed. Ya. A. Smorodinskogo. M., **1971.**
3. Makeeva L. B. *Filosofiya Kh. Patnema [Philosophy of H. Putnam].*
4. Frege G. *Osnovopolozheniya arifmetiki. Logiko-matematicheskoe issledovanie ponyatiya chisla [Basic Principles of Arithmetic. Logical-Mathematical Study of the Concept of Number].* Tomsk, **2000.**
5. Tselishchev V. V. *Filosofiya matematiki [Philosophy of Mathematics].* Ch. 1. Novosibirsk: Nauka, **2002.**
6. Dummett M. *The interpretation of Frege’s philosophy.* London, **1981.**
7. Russell B. *The Principles of Mathematics 2nd ed.* London, **1937.**

Received 11.07.2014.